19____év. | Név: ____ | Hely: ____ | ____szám.

Szelezsán János.

Differenciálegyenletek numerikus integrálási módszerei, és ezek prgramozása az M-3 elektronikus számológépre.

Szakdolgozat

1958

Gyorsfűző

MSZ 5618

Fogyasztói ár: Ft 1.30

Szelezsán János:

Differenciálegyenletek numerikus integrálási módszerei, és ezek programozása az M-3 elektronikus számológépre.

/ Szakdolgozat./

T a r t a l o m j e g y z é k.

Differenciálegyenletek numerikus integrálási módszerei s ezek programozása az M-3 elektronikus számológépre.

A numerikus analizis egyik fontos feladata a differenciálegyenletek numerikus integrálása. Annál is inkább fontos ez, minthogy a matematikai fizika és a müszaki tudományok ujabb fejlődése során egyre gyakrabban merülnek fel olyan problémák, amelyeknek megoldásához elemi uton nem integrálható differenciálegyenletek bizonyos megoldásait, illetve a megoldás bizonyos pontokban vett közelitő értékeit kell megtalálni.

Az első és másodrendü közönséges differenciálegyenletek numerikus integrálására aránylag elég sok módszert kidolgoztak az adott differenciálegyenlet jellege s a pontossági követelmények döntik el, melyik módszert érdemes alkalmazni. "Abszolut-jó" módszer nem ismeretes.

A magasabbrendü s a parciális differenciálegyenletekre már kevesebb numerikus integrálási módszer ismeretes.

A szóbanforgó módszerek "kézi" számitásra készültek, de elektronikus számológépre programozhatók. Fontos és hasznos feladat lenne az elektronikus számológépek adottságait figyelembe vevő, az ezen gépek "testére szabott" módszerek kidolgozása.

A következőkben megvizsgálunk néhány numerikus integrálási módszert, s elkészitjük ezen módszerek programját az M-3 elektronikus számológépre. A szóbanforgó vizsgálatok inkább összefogla-

ló jellegüek, /A Runge-Kutta módszert kissé ~~szélesebben~~ részletesebben. vizsgál
a dolgozat tárgyát ugyanis ezen módszerek programja képezi.

Mielőtt azonban erre rátérnénk röviden ismertetjük a szóbanforgó gépet.

Az M-3 gép.

Az M-3 kétcimü, párhuzamos müködésü, fixponttal dolgozó gép. Ez utóbbi azt eredményezi, hogy csak abszolutértékben egynél kisebb számokat tudunk a gépben ábrázolni. A gép memóriája 2048 szó tárolására alkalmas, egy szó 31 bináris jegyből áll. Ha a szó számot ábrázol, akkor az első jegy az előjel /+=0 -=1/ a többi pedig a $2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-30}$ helyértékek

Ha a szó utasitást ábrázol, az első jegy mindig 0, a következő hat bit a müveleti jelnek, az ezután következő 12-12 bit az első illetve a második cimnek felel meg.

Az utasitásokat 8-as számrendszerben irjuk fel, igy pl. 02 1756 3614 egy utasitást jelent.

A gép el tudja végezni a négy alapmüveletet és a helyértékenkénti logikai szorzás müveletét. Vannak ezenkivül még vezérlési és megállási utasitások is.

A számitások elvégzése az M-3 gépen.

Minthogy a gép értékkészlete a $-1+2^{-30} \leq x \leq 1-2^{-30}$ intervallum azért az adott feladatokat ugy kell transzformálni, hogy egyetlen adat se essen az intervallumon kivül, azaz: ne lépjen fel tulcsordulás. Egyszerübb feladatoknál ez léptékváltoztatással elérhető. Előfordul, hogy ezt nem sikerül biztositani; ekkor az u.n. lebegőpontos ábrázolásmódra térünk át, amelynek lényege a következő.

A számokat normalizált alakba irjuk fel, ezen az x szám esetén $x= a2^{p}$ alakot érjük ~~a~~ ahol $\frac{1}{2} \leq a < 1$; $-30 \leq p \leq 30$.

A gépben külön memoriapoziciókban ábrázoljuk a mantisszát s külön pozicióban a kitevőt éspedig a következőkben páros poziciókban a mantisszát a rákövetkező páratlanokban a kitevőt. /ezt igy jelöljük: /2n/=x= /2n+1/. Természetesen igy az alapmüveletek nem végezhetők el egy utasitással, ezek elvégzésére egy szubrutint kell elkésziteni.

Legyen ez a szubrutin a memóriában a következő poziciókban elhelyezve.

1/ Az összeadást	a szubrutin	u-től	$u+i_1$-ig	
2/ A kivonást a	-"-	q-től	$q+i_2$-ig	
3/ A szorzást a	-"-	r-től	$r+i_3$-ig	
4/ Az osztást a	-"-	s-től	$s+i_4$-ig	
5/ A normalizálást	-"-	v-től	$v+l$-ig	terjedő

része végzi el. Bármely müvelet után a szubrutin normalizál is. Jelöljük ki regiszterenként ebben a szubrutinban a /P,P+1/ ; / Q,Q+1/ poziciókat. $(Q=P+2)$.

Igy ha $x=a2^{p}$; $y=b2^{q}$ akkor bármely alapmüvelet a következő módon végezhető el./ < > -al jelöljük egy mennyiség cimét./

r	Πr	<a>	P
r+1	Πr	<p>	P+1
r+2	Πr	<b>	Q
r+3	Πr	<q>	Q+1
r+4	Πr	<Πy - §>	v
r+5		Πy —	a megfelelő müvelet kezdő poziciója

A. ξ annak a poziciónak a cime, ahova a müvelet elvégzése után a vezérlést át kell adni.

Az eredmény $(x+y, x-y, xy, \frac{x}{y})$ normalizálva /P,P+1/-ben adódik.

A Lebegőpnttal való számolásnál az utasitások száma lényegesen megnő. Fixponttal való számolásnál viszont ügyelni kell arra, hogy az adatok ne csorduljanak tul; ezt különösen a közbülső eredményeket illetően nem mindig sikerül biztositani, hogy ha lehet is esetleg jelentékeny jegyveszteséggel.

Konvertálás és kinyomtatás.

A konvertálás és kinyomtatás a konvertáló szubrutin behivásával történik a következő két utasitás segitségével:

r	Πr	a	$\beta,$
$r+1$	Πy	—	β'

ahol β a konvertáló szubrutin munkapoziciója β' pedig a kezdő poziciója.

Az a tartalma pedig /a/=n b_1 b_2 ;ahol n-el jelöltük az egymásután következő kinyomtatandó adatok számát, / 6 bit terjedelemben / b_1-el /az első cim helyén/ azt a poziciót ahol az első kinyomtatandó adat van, b_2-vel azt a,.cimet ahova a vezérlést a kinyomtatás után át kell adni.

2. Közönséges differenciálegyenletek.

Az 1./a $y^{/\nu/}/x_0/=y_0^{/\nu/}$ $/\nu=0,1,\ldots,n-1/$ kezdeti feltétellel adott

1./ $y^{/n/}= f/x,y,y',\ldots,y^{/n-1/}/$ n-edrendü közönséges differenciálegyenletnek $y/x/$ megoldása az $/a,b/$-ben, ha azonosan kielégiti 1/-et s az 1/a- feltételt. $/a=x_0/$, ahol $y_0^{(\nu)}$-k előre adott értékek.

Feltesszük, hogy a megoldás egzisztenciája és unicitása biztositva van.

Jelöljük a megoldás x_n $/a=x_0 \leq x_n \leq b/$ pontban vett $y/x_n/$ értékének közelitőértékét y_n-el. A szóbanforgó módszereknek az a lényegük, hogy a közelitő megoldást pontonként, s az előző pontokban már ismert közelitő értékek segitségével állitják elő.

Osszuk fel az /ab/ intervallumot n részre s a $\frac{b-a}{n}$ = h-t nevezzük lépésköznek. A megoldás közelitő értékeit az $x_\nu = x_0+\nu h$ pontokban állitjuk elő. A h lépésköz nagyságát a pontossági követelmények, s az adott differenciálegyenlet jellege határozza meg.

A következőkben kétféle tipusu módszert vizsgálunk, s programozunk be; a:

1./ Runge-Kutta módszert s a

2./ Differenciamódszereket.

3. A Runge-Kutta módszer.

A Runge-Kutta módszer egyik legjobban elterjedt numerikus integrálási módszer. Előnye, hogy eléggé pontos, s elég nagy lépésközöket lehet használni. Kézi számitásban nafy hátránya viszont, hogy sok számitást igényel, mivel aránylag sokszor kell a differenciálegyenletbe behelyettesiteni. Gépi számitásnál különösen fontos az az előnye, hogy nem kell kezdőértékeket számolni, mint más módszereknél.

A programozandó Runge-Kutta módszer speciális esete a következő általános módszernek.

Legyen adva az

3.1 $y^{/n/} = f/x, y, y', y'', \dots, y^{/n-1/})$ n-edrendű differenciálegyenlet, az $y_0^{(\nu)} = y^{(\nu)}/x_0/$ $/\nu = 0,1,2,\dots,n-1/$ kezdeti feltétellel. Határozzuk meg a megoldás és a differenciálhányadosok közelitő numerikus értékét az $x_1 = x_0 + h$ pontban. /h a lépésköz/.

Irjuk fel a megoldás s a differenciálhányadosok Taylor-sorát az x_1 pontban.

$$y(x_1) = y_0 + \frac{h}{1!} y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \dots$$

$$y'(x_1) = y_0' + \frac{h}{1!} y_0'' + \frac{h^2}{2!} y_0''' + \dots$$

$$\vdots$$

$$y^{(\nu)}(x_1) = y_0^{(\nu)} + \frac{h}{1!} y_0^{(\nu+1)} + \frac{h^2}{2!} y_0^{(\nu+2)} + \dots$$

Jelöljük $T_\nu(\alpha)$-val a

$$T_\nu(\alpha) = y_0^{(\nu)} + \frac{\alpha h}{1!} y_0^{(\nu+1)} + \frac{(\alpha h)^2}{2!} y_0^{(\nu+2)} + \dots + \frac{(\alpha h)^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!} y_0^{(n-1)}$$

összeget. $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$

Akkor

$$y_0^{(\nu)} + \frac{h}{1!} y_0^{(\nu+1)} + \frac{h^2}{2!} y_0^{(\nu+2)} + \dots + \frac{h^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!} y_0^{(n-1)} = T_\nu(1)$$

Legyenek a $k, k', k'', \dots, k^{(n-1)}$ mennyiségek olyanok, hogy ezekkel képezve az

3.3. $$y_1^{(\nu)} = T_\nu(1) + \frac{\nu!}{h^\nu} k^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, \dots n-1)$$ összeget, $|y_1^{(\nu)} - y^{(\nu)}(x_1)| < \varepsilon(h, \nu)$ legyen.

Állitsuk elő a $k^{(\nu)}$ mennyiségeket a $k_1, k_2, \dots, k_r$ mennyiségek lineáris kombinációjaként, azaz legyen

3.4. $$k^{(\nu)} = \sum_{\varrho=1}^{r} \gamma_{\nu\varrho} k_\varrho \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots n-1).$$

ahol k_ϱ az f függvény valamilyen közbülső helyen vett értéke. Éspedig

$$k_1 = \frac{h^n}{n!} f(x_0, T_0(0), T_1(0), \dots T_{n-1}(0))$$

3.5. $$k_2 = \frac{h^n}{n!} f(x_0 + \alpha_1 h, T_0(\alpha_1) + a_{10} k_1, \dots T_{n-1}(\alpha_1) + a_{1\,n-1} k_1)$$

$$k_3 = \frac{h^n}{n!} f(x_0 + \alpha_2 h, T_0(\alpha_2) + a_{20} k_1 + b_{20} k_2, \dots T_{n-1}(\alpha_2) + a_{2\,n-1} k_1 + b_{2\,n-1} k_2)$$

A $T_\nu(\alpha_\varrho)$ definiciója értelmében az $x = x_0 + \alpha_\varrho h$, $y = T_0(\alpha_\varrho)$, $y' = T_1(\alpha_\varrho), \dots, y^{(n-1)} = T_{n-1}(\alpha_\varrho)$ mennyiségek a pontos értékek bizonyos környezetében vannak.

A (3,5)-ben szereplő $\alpha_\varrho, a_{\nu\varrho}, b_{\nu\varrho}, \dots, \gamma_{\nu\varrho}$ konstansokat abból a feltételből határozzuk meg, hogy az $y^{(\nu)}(x_1)$ pontos értékek, s az $y_1^{(\nu)}$ közelitőértékek Taylor sora a lehető legmagasabb foku tagig megegyezzen.

A 3,2 jelölést felhasználva:

36 $$y^{(\nu)}(x_1) = T_\nu(1) + \frac{h^{n-\nu}}{(n-\nu)!} y_0^{(n)} + \dots \quad = T_\nu(1) + \frac{\nu!}{h^\nu}\left[\binom{n}{\nu}\frac{h^n y_0^{(n)}}{n!} + \binom{n+1}{\nu}\frac{h^{n-\nu+1}}{(n-\nu+1)!} y_0^{(n+1)} + \dots\right)$$

Bevezetjük a D,E,F operátorok fogalmát.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$ ből

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} f.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$y = u_0 \quad y' = u_1. \qquad y^{(n)} = u_n = f$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_\nu = \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \quad f_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_\mu \partial u_\nu} \quad f_{x\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u_\nu}$$

Definiáljuk a D operátort a

$$D\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \dots + f \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}$$ egyenlőséggel,

ahol

$$\varphi = \varphi(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$$

Igy nyilván

$$y^{(n+1)} = Df.$$

A D operátor r-edik hatványán formálisan a

$$D^r = \left(\frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} + \dots + f \frac{\partial}{\partial u_{n-1}}\right)^r$$ kifejezést értjük.

Értelmezhető $\frac{d}{dx} Df$ is.

$$\frac{d}{dx} Df = D^{(2)} f + u_2 f_0 + u_3 f_1 + \dots + f f_{n-2} + f_{n-1} Df$$

Jelöljük $\frac{d}{dx} Df$ -et Ef -el

s a $$Ef = \frac{d}{dx} Df.$$

Igy: $$y^{(n+2)} = \frac{d}{dx} Df = Ef.$$

Bevezetve még az F operátort az

$$Ff = D^{(3)} f + 3[u_2 Df_0 + u_3 Df_1 + \dots + Df\, Df_{n-1}] + (u_3 f_0 + \dots + u_{n-1} f_{n-4} + f f_{n-3})$$ egyenlőséggel nyerjük,

hogy $$y^{(n+3)} = Ff + f_{n-1} Ef + f_{n-2} Df.$$

A bevezetett jelölések segitségével (36) a következő alakban irható

3,7 $$y^{(\nu)}(x_1) = T_\nu(1) + \frac{\nu!}{h^\nu}\left[\binom{n}{\nu}\frac{h^n}{n!}f + \binom{n+1}{\nu}\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}Df + \right.$$
$$\left. + \binom{n+2}{\nu}\frac{h^{n+2}}{(n+2)!}Ef + \binom{n+3}{\nu}\frac{h^{n+3}}{(n+3)!}(Ff + f_{n-1}Ef + f_{n-2}Df + \dots\right]$$

/Ha f-et argumentumok nélkül irjuk, akkor a kezdő helyen vett értéket értjük/

A k^{ν}-t ugy választjuk meg, hogy a (33) és (37) Taylor sorok a lehető legmagasabb foku tagig megegyezzenek. Igy

$$k^{(\nu)} = \frac{h^n}{n!}\left[\binom{n}{\nu}f + \binom{n+1}{\nu}\frac{h}{n+1}Df + \binom{n+2}{\nu}\frac{h^2}{(n+1)(n+2)}Ef + \right.$$
$$\left. + \binom{n+3}{\nu}\frac{h^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}(Ff + f_{n-1}Ef + f_{n-2}Df) + \dots\right]$$

A most levezetett általános formulák numerikus számitásra nem alkalmasak. A bennük szereplő mennyiségek különféle megválasztásával különböző speciális formulákat lehet előállitani. Egy ilyen a következő.

Legyen r=4;/azaz $k^{(\nu)}$-t a k_1, k_2, k_3, k_4 mennyiségek lineáris kombinációjaként állitjuk elő/ s $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ $\alpha_3 = 1$ / azaz a szereplő abszcisszák $x_0, x_0+\frac{h}{2}, x_0+h, x_0+h$ / A k_ν mennyiségeket a következő formulák határozzák meg.

$$k_1 = \frac{h^n}{n!}f(x_0, T_0(0), T_1(0), \dots, T_{n-1}(0)),$$

$$k_2 = \frac{h^n}{n!}f\left(x_0+\frac{h}{2}, T_0\left(\tfrac{1}{2}\right)+\frac{k_1}{2^n}, T_1\left(\tfrac{1}{2}\right)+\binom{n}{1}\frac{1!\,k_1}{2^{n-1}h},\right.$$
$$\left. T_2\left(\tfrac{1}{2}\right)+\binom{n}{2}\frac{2!\,k_1}{2^{n-2}h^2}, \dots, T_{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)+\frac{n!\,k_1}{2h^{n-1}}\right)$$

$$k_3 = \frac{h^n}{n!}f\left(x_0+\frac{h}{2}, T_0\left(\tfrac{1}{2}\right)+\frac{k_1}{2^n}, T_1\left(\tfrac{1}{2}\right)+\binom{n}{1}\frac{1!\,k_1}{2^{n-1}h},\right.$$
$$\left. T_2\left(\tfrac{1}{2}\right)+\binom{n}{2}\frac{2!\,k_1}{2^{n-2}h^2}+\dots, T_{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{n!\,k_2}{2h^{n-1}}\right],$$

$$k_4=\frac{h^n}{n!}f\Big[x_0+h,\ T_0(1)+k_3,\ T_1(1)+\binom{n}{1}\frac{1!\,k_3}{h},$$

$$T_2(1)+\binom{n}{2}\frac{2!\,k_3}{h^2},\dots,\ T_{n-1}(1)+\frac{n!\,k_3}{h^{n-1}}\Big]$$

4. Runge-Kutta formula

Fejtsük Taylor sorba a k_1, k_2, k_3, k_4 mennyiségeket, az $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{/n-1/}$ pont körül.

A k_1 közvetlenül adódik: $k_1=\frac{h^n}{n!}f$ A k_2, k_3, k_4 kiszámítása nehezebb, minthogy az argumentumok bizonyos összegek. Például:

$$\frac{n!}{h^n}k_2=f\Big(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+y'\frac{h}{2}+y_0''\frac{h^2}{4\cdot 2!}+\dots+f\frac{h^n}{2^n n!},\ y_0'+y_0''\frac{h}{2}+\dots$$

A jobboldali sorfejtésnél elhagyjuk azokat a tagokat, amelyek h-t háromnál magasabb hatványon tartalmazzák.

Vizsgáljuk az egyszerűség kedvéért n=2 esetet, bevezetve a $y'=u$ s felhasználva az előzőkben bevezetett jelöléseket, így

$$\frac{2}{h^2}k_2=f\Big(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}u+\frac{h^2}{8}f,\ u+\frac{h}{2}f\Big)=$$

$$=f+\frac{h}{2}f_x+\Big(\frac{hu}{2}+\frac{h^2}{8}f\Big)f_y+\frac{h}{2}ff_u+\frac{h^2}{8}f_{xx}+$$

$$+\Big(\frac{h^2u}{4}+\frac{h^3f}{16}\Big)f_{xy}+\frac{h^2}{4}ff_{xu}+\frac{h^2u^2}{8}+\frac{h^3uf}{16}f_{yy}+$$

$$+\Big(\frac{h^2uf}{4}+\frac{h^3f^2}{16}\Big)f_{yu}+\frac{h^2f^2}{8}f_{uu}+\dots$$

Általános esetben tetszőleges n-re

$$k_1=\frac{h^n}{n!}f$$

$$k_2=\frac{h^n}{n!}\Big[f+\frac{h}{2}Df+\frac{h^2}{8}(Ef-f_{n-1}Df)+\frac{h^3}{48}(Ef-3DfDf_{n-1})\Big]$$

$$k_3 = \frac{h^n}{n!}\Big[f + \frac{h}{2}Df + \frac{h^2}{8}(Ef + f_{n-1}Df) +$$
$$+ \frac{h^3}{48}(Ff + 3Df\,Df_{n-1} + 3f_{n-1}(Ef - f_{n-1}Df))\Big]$$
$$k_4 = \frac{h^n}{n!}\Big[f + hDf + \frac{h^2}{2}Ef +$$
$$+ \frac{h^3}{6}(Ff + \frac{3}{4}f_{n-1}(Ef + f_{n-1}Df) + \frac{3}{2}f_{n-2}Df)\Big]$$

Ezen négy mennyiségből előállitjuk $k^{(\nu)}$-t $(\nu = 0, 1, \dots)$

a 4.1. $k^{(\nu)} = \sum_{\varrho=1}^{4} \gamma_{\nu\varrho} k_\varrho$ képlet alapján.

Másként

4.2 $$k^{(\nu)} = \frac{h^n}{n!}\Big[\binom{n}{\nu}f + \binom{n+1}{\nu}\frac{h}{n+1}Df + \binom{n+2}{\nu}\frac{h^2}{(n+1)(n+2)}Ef + \dots\Big]$$

s igy az 4.1-ban szereplő konstansokat együttható összehasonlitással nyerhetjük.

Az együttható összehasonlitásból

$$\gamma_{\nu1} + \gamma_{\nu2} + \gamma_{\nu3} + \gamma_{\nu4} = \binom{n}{\nu}$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{\nu2} + \frac{1}{2}\gamma_{\nu3} + \gamma_{\nu4} = \binom{n+1}{\nu}\frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{8}\gamma_{\nu2} + \frac{1}{8}\gamma_{\nu3} + \frac{1}{2}\gamma_{\nu4} = \binom{n+2}{\nu}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$-\frac{1}{8}\gamma_{\nu2} + \frac{1}{8}\gamma_{\nu3} = 0$$

Megoldva az egyenletrendszert $\gamma_{\nu i}$-re $(i = 1, 2, 3, 4)$.

$$\gamma_{\nu1} = \binom{n+2}{\nu}\frac{(n-\nu)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\gamma_{\nu2} = \gamma_{\nu3} = \binom{n+2}{\nu}\frac{2(n-\nu)}{(n+1)(n+2)} \qquad \gamma_{\nu4} = \binom{n+2}{\nu}\frac{2-(n-\nu)}{(n+1)(n+2)}$$

Igy

$$k^{(\nu)} = \binom{n+2}{\nu}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big[(n-\nu)^2 k_1 + 2(n-\nu)(k_2 + k_3) +$$
$$+ (2-(n-\nu))k_4\Big]$$

Hasonlitsuk össze a h^{n+3} együtthatóit $k^{(\nu)}$-ben bevezetve az $n - \nu = q$ jelölést.

$$\frac{h^{n+3}}{n!}\binom{n+2}{\nu}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{q+3}\Big[Ff + f_{n-1} + Ef + f_{n-2}Df\Big]$$

és $$\frac{h^{n+3}}{n!}\binom{n+2}{\nu}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big[\frac{4-q}{12}Ff + \frac{1}{4}f_{n-1}Ef + \frac{1-q}{4}f_{n-1}^2Df + \frac{2-q}{4}f_{n-2}Df\Big]$$

A két kifejezés $q = 1$-nél azaz $\nu = n-1$-nél megegyezik, s más ν-re nem.

Igy az $y, y', \dots, y^{/n-2/}$ és közelitőértékeik Taylor sora a h^{n+2}-ik tagig, az $y^{/n-1/}$ és közelitőértékének Taylor sora a h^{n+3}ik tagig egyezik meg.

A Runge Kutta módszer pontossága tehát $0/h^{n+2}/$ nagyságrendü $n > 1$; s $0/h^4/$ $n=1$ esetén.

A <u>Runge-Kutta módszer</u> gyakorlati alkalmazásra alkalmas alakja

Az $y^{(\nu)}$ helyett bevezetjük a

$$v_\nu = \frac{h^\nu}{\nu!} y^{(\nu)}$$ mennyiségeket. $(\nu = 0, 1, \dots n-1)$

Vezessük be a következő jelöléseket is.

$$v_{\nu 0} = \frac{h^\nu}{\nu!} y_0^{(\nu)}$$

$$f\left(x, y, \frac{1!}{h} v_1, \frac{2!}{h^2} v_2, \dots \frac{(n-1)!}{h^{n-1}} v_{n-1}\right) = \phi(x, v_0, v_1, v_2, \dots v_{n-1})$$

$$t_\nu(\alpha) = T_\nu(\alpha)\frac{h^\nu}{\nu!} = v_{\nu 0} + \alpha\binom{\nu+1}{\nu} v_{\nu+1\,0} + \alpha^2\binom{\nu+2}{\nu} v_{\nu+2\,0} + \dots$$
$$+ \alpha^{n-\nu-1}\binom{n-1}{\nu} v_{n-1\,0} \quad (\nu = 0, 1 \dots n-1)$$

Igy:

$$k_1 = \frac{h^n}{n!}\phi(x_0, v_{00}, v_{10}, v_{20}, \dots v_{n-1\,0})$$

$$k_2 = \frac{h^n}{n!}\phi\Big(x_0 + \frac{h}{2}, t_0\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{k_1}{2^n}, t_1\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{k_1}{2^{n-1}}\binom{n}{1}, t_2\left(\tfrac{1}{2}\right) +$$
$$+ \frac{k_1}{2^{n-2}}\binom{n}{2}, \dots, t_{n-2}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{k_1}{4}\binom{n}{n-2}, t_{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{k_1}{2}\binom{n}{n-1}\Big)$$

$$k_3 = \frac{h^n}{n!}\phi\Big(x_0 + \frac{h}{2}, t_0\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{k_1}{2^n}, t_1\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{k_1}{2^{n-1}}\binom{n}{1}, t_2\left(\tfrac{1}{2}\right) +$$
$$+ \frac{k_1}{2^{n-2}}\binom{n}{2}, \dots, t_{n-2}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{k_1}{4}\binom{n}{n-2}, t_{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{k_2}{2}\binom{n}{n-1}$$

$$k_4 = \frac{h^n}{n!}\phi\Big(x_0 + h, t_0(1) + k_3, t_1(1) + k_3\binom{n}{1}, t_2(1) + k_3\binom{n}{2}, \dots$$
$$t_{n-2}(1) + k_3\binom{n}{n-2}, t_{n-1}(1) + k_3\binom{n}{n-1}\Big).$$

Nyilván a $v_{\nu 1} = \frac{h^{\nu}}{\nu!} y_1^{(\nu)}$ mennyiségeket a

$v_{\nu 1} = t_{\nu}(1) + h^{(\nu)}$ képlet adja.

A programozásra azokat az előbbi képleteknek megfelelő kész sémákat használjuk fel, amelyek Collatz: Numerische Behandlung von Differentiálgleichungen c.könyvének 66. oldalán találhatók.

A lépésköz megválasztása.

A h-t ugy választjuk meg, hogy

1/ $\frac{|k_2 - k_3|}{|k_1 - k_2|} \leq \varepsilon \qquad (\varepsilon \sim \frac{3}{100})$ legyen.

/azaz k_2-k_3 a k_1-k_2-nek csak néhány %-a legyen. Lásd Collatz emlitett könyve, 68.old./

A módszer programjában a következőképen járunk el. Kiindulunk egy valamilyen h-ból, de beprogramozzuk 1/ vizsgálatát s ha 1/ nem teljesül, akkor felezzük a h lépésközt s tovább h/2-vel számolunk.

A közelités pontosságának megállapitására nem ismerünk általános módszereket. Az elsőrendű esetre ugyan ismeretes a következő Biberbach-tól származó becslés .

$$|y_1 - y(x_1)| < \frac{6MN|x_1 - x_0|^5 |N^5 - 1|}{N-1} \quad \text{ha } |f(x,y)| < M$$

$$\left|\frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}\right| < \frac{N}{M^{k-1}}, \quad (j+k \leq 3) \quad |x - x_0| N < 1 \quad aM < b \quad h \leq a.$$

de gyakorlatilag ez nem hasznositható.

Első- másod-, harmad és negyedrendű Runge-Kutta képletek fixpontos programja.

Mivel a gép fixponttal működik ezért ügyelni kell arra, hogy mind a közbülső, mind a végeredmények abszolut értékben $1 - 2^{-30}$-nál ne legyenek nagyobbak.

Tegyük fel tehát, hogy az

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$ differenciálegyenlet olyan hogy

5.1 $|y| \leq K_0 < 1;\ |y'| \leq K_1 < 1,\ \dots\ |y^{(n-1)}| \leq K_{n-1} < 1$
$|y^{(n)}| < 1 \quad |x| < 1 \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$

/valamilyen $z = u/x,y,/$ $y = v$ $/x,y/$ $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ transformációval ilyen alakra hoztuk/ A K_0, $K_1, \dots, K_{n-1}$-et ugy választjuk meg, hogy a közbülső eredményeknél se lépjen fel tulcsordulás. A közbülső eredményeket esetenként vizsgáljuk meg.

Mint látni fogjuk a közbülső eredmények becsléséből

K_0-ra : $\quad K_0 = 1 - 2^{-30} - \sum_{i=1}^{n} \frac{h^i}{i!} - \varepsilon \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$ (5.2)

eredményt kapjuk, ahol $|y(x_i) - y_i| < \varepsilon$.

A következőkben feltesszük, hogy $h \leq 0,1$ / ez nyilván nem lényeges megszoritás lévén $|x| < 1$./

Az ε értékét nem ismerjük, azonban

$$|y^{(\nu)}(x_i) - y_i^{(\nu)}| \approx \begin{cases} O(h^{n+2}) & \text{ha } n > 1 \\ O(h^4) & \text{ha } n = 1 \end{cases}$$

reláció miatt indokoltnak látszik az a feltevés, hogy $\varepsilon <$ 94

Tehát (5.2) helyett általában $K_0 = \frac{1}{2}$ -t véve elkerülhető a tulcsordulás. Mindenesetre K_1 értékét esetenként megvizsgáljuk.

Az elsőrendű differenciálegyenlet Runge-Kutta módszerének programja.

Legyen adva az $y' = f/x,y/$ differenciálegyenlet a $y/x_0/=y_0$ kezdeti feltétellel. Ennek közelitő numerikus megoldását az /ab/ intervallumban a következő sémába foglalt képlettel oldhatjuk meg a Runge-Kutta módszer szerint. /Lásd Collatz. 66.o./

x	y	k=h.f/x,y/	
x_{n-1}	y_{n-1}	k_1	
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}k_1$	k_2	$k=\frac{1}{6}/k_1+2k_2+2k_3+k_4/$
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}k_2$	k_3	
$x_{n-1}+h$	$y_{n-1}+k_3$	k_4	
$x_n=x_{n-1}+h$	$y_n=y_{n-1}+k$		
⋮	⋮		

A közbülső eredmények vizsgálata.

A feltevés szerint $|y'| = |f(x,y)| < 1 \quad |y| \leq K_0 < 1$

Igy: $|k_i| = |h f(x,y)| < h \quad (i=1,2,3,4)$

s $|y_n + \alpha k_i| \leq |y_n| + |k_i| < |y_n| + h \leq 1-2^{-30}$

$(\alpha \leq 1)$ ha $|y_n| \leq 1-2^{-30}-h$

A k-ra viszont

$$|k| = |\tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)| \le \tfrac{1}{6}6h = h$$

Tehát $K_o = 1 - 2^{-30} - h - 0{,}1$-et véve, 1/ feltétel biztositja a tulcsordulás elkerülését. $(\varepsilon < 0{,}1 \quad |y(x_i) - y_i| < \varepsilon)$

<u>Megjegyzés</u>

Nyilvánvaló, hogy ha

$$|y'| < 1 \quad |y_0| < 1 - \delta$$

és $|x| \le \delta < 1$

akkor $|y| < 1$

ugyanis: $|k| < h$ lévén

$$|y_n - y_{n-1}| < h$$

Tehát a megoldás lépésenként legfeljebb h-val növekszik.

Az ℓ-edik pontban vett közelitő értékre tehát

$$|y_\ell| \le |y_0| + \ell h .$$

Ha $|y_0| + \ell h < 1$

azaz $|y_0| < 1 - \ell h$

akkor $|y_\ell| < 1$

Ha tehát $|y_0| < 1 - \delta \qquad (\ell h < \delta)$

akkor $\max\limits_{(\ell)} |y_\ell| < 1 .$

Pozicióelosztás

Legyen elhelyezve az $y_n' = f/x_n y_n/$-t kiszámitó szubrutin az α-tól α+k-1-ig terjedő poziciókban s $(\alpha+k)$=24 Πy 0030 7777 legyen. A 0030-ban helyezzük el minden esetben a szubrutint kiugrató utasitást. / A szubrutin végén ide adjuk át a vezérlést/ A $f/x_n y_n/$ értékét mindig a 0031 pozicióban helyezzük el, x_n helye mindig 0032, y_n helye mindig 0033 legyen.

Konstansok

0001= $\frac{1}{3}$
0002= 24 Πy 0105 7777
0003= 24 Πy 0114 7777
0004= 24 Πy 0125 7777
0005= 24 Πy 0137 7777
0006= $\frac{1}{2}$
0007= 02 0032 0145

Paraméterek

0010= x_0= a
0011= y_0
0012= $\frac{h}{2}$
0013= 6-h
0014= Πy 24 α 7777
0015= ε
0022= ϑ

Munkapoziciók 00016 0017 0020 0021

Program

0100	05	Πτ	0011	0033	
0101	05	Πτ	0010	0032	
0102	05	Πτ	0002	0030	
0103	05	Πτ	0033	0017	
0104	24	Πy	0014	7777	kiszámitja $f/x_n, y_n/$-t s beirja 0031-be
0105	03	×	0012	0031	
0106	20	↓+	0000	0016	
0107	00	+	0012	0032	
0110	10	+,	0031	0017	
0111	20	↓+	0000	0033	
0112	05	Πτ	0003	0030	
0113	24	Πy	0014	7777	
0114	03	×	0012	0031	
0115	20	↓+	0017	0033	

Másodrendű differenciálegyenlet Runge-Kutta módszerének programja

Legyen adva az $y''=f/x,y,y'/$ differenciálegyenlet az $y/x_0/=y_0$ $y'/x_0/=y'_0$ kezdeti feltétellel. Ennek közelitő numerikus megoldását az /ab/ intervallumban a Runge-Kutta módszer szerint a következő séma alapján számolhatjuk ki.

x	y	$hy'=v_1$	$k=\frac{h^2}{2} f/x, y, \frac{v_1}{h}/$
x_{n-1}	y_{n-1}	v_{1n-1}	k_1
$x_{n-1}+\frac{h}{2}$	$y_{n-1}+\frac{1}{2} v_{1n-1}+\frac{1}{4} k_1$	$v_{1n-1}+k_1$	k_2
$x_{n-1}+\frac{h}{2}$	$y_{n-1}+\frac{1}{2} v_{1n-1}+\frac{1}{4} k_1$	$v_{1n-1}+k_2$	k_3
$x_{n-1}+h$	$y_{n-1}+v_{1n-1}+k_3$	$v_{1n-1}+2k_3$	k_4
$x_n=x_{n-1}+h$	$y_n=y_{n-1}+v_{1n-1}+k$	$v_{1n}=v_{1n-1}+k'$	
⋮	⋮	⋮	

$$k=\frac{1}{3}/k_1+k_2+k_3/$$

$$k=\frac{1}{3}/k_1+2k_2+2k_3+k_4/$$

o116	−,	11	oo31	oo16	
o117	↓×	23	oo15	oo2o	
o12o	Пс	o5	oo31	oo21	
o121	+,	1o	oo31	oo31	
o122	↓+	2o	oo16	oo16	
o123	Пс	o5	ooo4	oo3o	
o124	Пу	24	oo14	7777	
o125	×	o3	oo12	oo31	
o126	↓+	2o	oo31	oo33	
o127	↓+	2o	oo16	oo16	
o13o	−,	11	oo31	oo21	
o131	↓|−|,	71	oo2o	7777	
o132	УП	34	o133	o147	
o133	+	oo	oo12	oo32	
o134	+	o5	oo17	oo33	
o135	Пс	o5	ooo5	oo3o	
o136	Пу	24	oo14	7777	
o137	×,	13	oo12	oo31	
o14o	↓+,	3o	oo16	----	
o141	↓×,	33	ooo1	----	
o142	↓+	2o	oo17	oo33	
o143	Пс	o5	ooo7	β	
o144	Пу	24	β+2		konvertálásra és kinyomtatásra szolgál
o145	−,	11	oo32	oo13	
o146	УП	34	megállás	o147	
o147	+	oo	oo12	oo13	
o15o	−	o1	oo12	oo32	
o151	×	o3	ooo6	oo12	
o152	Пс	o5	oo17	oo33	
o153	−,	11	oo12	oo22	
o154	УП	34	o1o2	megáll	

A közbülső eredmények vizsgálata

A feltevés szerint

$$|y| \leq K_0 < 1 \qquad |y'| \leq K_1 < 1 \qquad |y''| < 1 \qquad |x| < 1 \qquad 1.)$$

Az 1./ feltétel biztositja, hogy a közbülső eredmények sem csordulnak tul, a közbülső eredmények vizsgálata meghatározza K_1 értékét is.

Ugyanis:

$$|k_i| = \left|\frac{h^2}{2} f(x,y,y')\right| < \frac{h^2}{2} \quad s \quad |v_{in-1}| = |h y'_{n-1}| < h$$

s a táblázat második oszlopában lévő

$$y_{n-1} + p v_{in-1} + q k_i \qquad (|p| \leq 1, \ |q| \leq 1)$$

tipusu összegekre:

$$|y_{n-1} + p v_{in-1} + q k_i| \leq |y_{n-1}| + |v_{in-1}| + |k_i| <$$
$$< |y_{n-1}| + h + \frac{h^2}{2} \leq 1 - 2^{-30}$$

ha

$$|y_{n-1}| \leq 1 - 2^{-30} - \left(h + \frac{h^2}{2}\right)$$

/ezzel a becsléssel biztositjuk azt is, hogy a két tagból képezett összegek sem csordulnak tul, s $|v_{in-1} + 2k_3| \leq 1 - 2^{-30}$ is teljesül, lévén $|v_{in-1} + 2k_3| \leq |v_{in-1}| + 2|k_3| < h + h^2 \leq 1 - 2^{-30}$

Mivel

$$|k| = \left|\tfrac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right| < \tfrac{1}{3}\, 6\, \frac{h^2}{2} = h^2$$
$$|\bar{k}| = \left|\tfrac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)\right| < \tfrac{1}{3}\, 3\, \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{2}$$

igy itt sem történik tulcsordulás. tehát $K_0 = 1 - 2^{-30} - \left(h + \frac{h^2}{2}\right) - \varepsilon$ -t véve az /1/ feltétel biztosit a tulcsordulás ellen. $(|y(x_i) - y_i| < \varepsilon \quad x_i \in (a,b))$

Nyilvánvaló, hogy ha

$$|x| \leq K < 1 \quad |y''| \leq 1 - 2^{-30} \quad \text{és} \quad |y_0| \leq \eta_0 < 1 \quad |y'_0| \leq \eta_1 < 1$$

akkor $|y| < K_0 = 1 - 2^{-30} - \left(h + \frac{h^2}{2}\right) - \varepsilon$

Ugyanis

$$|k| < \frac{h^2}{2}$$

$$|k'| < h^2$$

s igy $v_{1n} = v_{1n-1} + k'$ lévén

$$h y'_n = h y'_{n-1} + k'$$

$$y'_n = y'_{n-1} + \frac{k'}{h}$$

$$|y'_n - y'_{n-1}| < \frac{h^2}{h} = h$$

Tehát az első differenciálhányadosok lépésenként legfeljebb h-val növekszenek. Ha tehát

$|y'_0| < 1 - \ell h$ $\quad (\ell h < 1)$ akkor

$|y'_\ell| < 1$

A megoldásra igy nyilván a következőket mondhatjuk.

Mivel

$$y_n = y_{n-1} + v_{1n-1} + k.$$

igy

$$|y_n - y_{n-1}| \le |v_{1n-1}| + |k|$$

De az előbb biztositottuk, hogy $|y'| < 1$ tehát

$|v_1| = |h y'|$ lévén $|v_1| < h$ s igy

$$|y_n - y_{n-1}| < h + \frac{h^2}{2}$$

Tehát a megoldás lépésenként legfeljebb $(h + \frac{h^2}{2})$-vel növekszik.

Igy ha:

$|y_0| \le 1 - 2^{-30} - (\ell+1)(h + \frac{h^2}{2})$ /megfelelően választott K korlát és h lépésköz esetén a jobboldal > 0/

akkor:

$$|y_\ell| \le |y_0| + \sum_{k=1}^{\ell} \left(h + \frac{h^2}{2}\right) < K_0$$

Ha 1^x teljesül, tehát akkor az /1/ feltétel is teljesül.

Pozicióelosztás

Legyen az $f/x_n, y_n, y'_n/$-t kiszámitó szubrutin az α -tól $\alpha+k-1$-ig terjedő poziciókban; s ebben a szubrutinban fix poziciókként jelöljük ki a következőket

x_n helye mindig 0001
y_n " " 0002
y'_n " " 0003 legyen.

Az $f/x_n, y_n, y'_n$ /-t mindig 0004-ban helyezzük el, s a szubrutinból való kiugráskor mindig 0005-nek adjuk át a vezérlést.

Konstansok

/oo21/= $\frac{1}{3}$
/oo22/= $\frac{1}{2}$
/oo23/= $\frac{1}{4}$
/oo24/= 24 Π_y o112 7777
/oo25/= 24 Π_y o125 7777
/oo26/= 24 Π_y o133 7777
/oo27/= 24 Π_y o152 7777

Paraméterek

/oolo/= $x_0 = a$
/ooll/= y_0
/oo12/= y'_0
/oo13/= h
/oo14/= b
/oo15/= 24 Π_y α 7777
/oo16/= o3 oool o17o
/oo17/= ε
/oo2o/= ϑ

Munkapoziciók:

oo3o oo31 oo32 oo33 oo34 oo35 oo36 oo37

0075	Пτ	05	0010	0001	
0076	Пτ	05	0011	0002	
0077	Пτ	05	0012	0003	
0100	−,	11	0013	0014	
0101	↓+	20	0000	0034	b-h
0102	×,	13	0013	0022	
0103	↓+	20	0000	0032	
0104	↓×	23	0013	0033	
0105	×,	13	0013	0003	
0106	↓+	20	0000	0031	
0107	Пτ	05	0024	0005	
0110	Пτ	05	0002	0030	
0111	Пγ	24	0015	7777	
0112	+	00	0032	0001	
0113	×	03	0033	0004	
0114	×,	14	0023	0004	
0115	↓+	20	0002	0002	
0116	×,	13	0022	0031	
0117	↓+	20	0002	0002	
0120	Пτ	05	0004	0035	
0121	+,	10	0031	0004	
0122	↓:	22	0013	0003	
0123	Пτ	05	0025	0005	
0124	Пγ	24	0015	7777	
0125	×	03	0033	0004	
0126	↓+,	30	0031	7777	
0127	↓:	22	0013	0003	
0130	Пτ	05	0004	0036	
0131	Пτ	05	0026	0005	
0132	Пγ	24	0015	7777	
0133	×	03	0033	0004	
0134	−,	11	0036	0035	
0135	↓×	23	0017	0037	
0136	−,	11	0004	0036	
0137	↓−,	31	0037	7777	
0140	УП	34	0141	0171	
0141	+	00	0004	0036	
0142	+	00	0032	0001	
0143	+,	10	0030	0031	

o144	↓+	2o	ooo4	ooo2
o145	:,	12	oo22	ooo4
o146	↓+,	3o	oo31	7777
o147	↓:	22	oo13	ooo3
o15o	Πc	o5	oo27	ooo5
o151	Πy	24	oo15	7777
o152	×	o3	oo33	ooo4
o153	+,	1o	oo35	oo36
o154	↓×,	33	oo21	7777
o155	↓+,	3o	oo31	7777
o156	↓+	2o	oo3o	ooo2
o157	+	oo	oo35	ooo4
o16o	:,	12	oo22	oo36
o161	↓+,	3o	ooo4	7777
o162	↓×,	33	oo21	7777
o163	↓+	2o	oo31	oo31
o164	↓:	22	oo13	ooo3
o165	Πc	o5	oo16	β
o166	Πy	24	β+2	7777
o167	−,	11	ooo1	oo34
o17o	YΠ	34	megáll	o1o7
o171	−	o1	oo32	ooo1
o172	×	o3	oo22	oo13
o173	Πc	o5	oo3o	ooo2
o174	:,	12	oo13	oo31
o175	↓+	2o	oooo	ooo3
o176	−,	11	oo13	oo2o
o177	YΠ.	34	o1oo	megáll

Harmadrendü differenciálegyenlet Runge-Kutta módszereinek programja

Legyen adva az $y''' = f/x,y,y''/$ differenciálegyenlet az $y/x_0/=y_0$, $y'/x_0/=y'_0$, $y''/x_0/=y''_0$ kezdeti feltétellel. Ennek közelitő numerikus megoldását az /a,b/ intervallumben a Runge-Kutta módszerrel a következő séma szerint számolhatjuk ki.

x	y
x_{n-1}	y_{n-1}
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}v_{1n-1}+\frac{1}{4}v_{2n-1}+\frac{1}{8}k_1$
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}v_{1n-1}+\frac{1}{4}v_{2n-1}+\frac{1}{8}k_1$
$x_{n-1}+h$	$y_{n-1}+v_{1n-1}+v_{2n-1}+k_3$
$x_n=x_{n-1}+h$	$y_n=y_{n-1}+v_{1n-1}+v_{2n-1}+k$
⋮	⋮

$hy' = v_1$	$\frac{h^2}{2} y'' = v_2$	$k = \frac{8h^3}{3} f/x, y, \frac{v_1}{h}, \frac{2v_2}{h^2})$
v_{1n-1}	v_{2n-1}	k_1
$v_{1n-1} + v_{2n-1} + \frac{3}{4} k_1$	$v_{2n-1} + \frac{3}{2} k_1$	k_2
$v_{1n-1} + v_{2n-1} + \frac{3}{4} k_1$	$v_{2n-1} + \frac{3}{2} k_2$	k_3
$v_{1n-1} + 2v_{2n-1} + 3k_3$	$v_{2n-1} + 3k_3$	k_4
$v_{1n-1} = v_{1n} + 2v_{2n} + k'$	$v_{2n} = v_{2n-1} + k''$	

ahol:

$$k = \frac{1}{20} /9k_1 + 6k_2 + 6k_3 - k_4/$$

$$k' = k_1 + k_2 + k_3$$

$$k'' = \frac{1}{2} /k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4/$$

A közbülső eredmények vizsgálata

A feltevés szerint $|y| \leq k_0 < 1$ $|y'| < K_1 \leq 1$ $|y''| \leq k_2 < 1$ $|x| < 1$

Igy: $|v_{1n-1}| = |h y'| < h$

$|v_{2n-1}| = |\frac{h^2}{2} y''| < \frac{h^2}{2}$

$|k_1| = |\frac{h^3}{6} f(x, y, y', y'')| < \frac{h^3}{6}$

Mivel:
$$|k| = \left|\frac{1}{20}(9k_1 + 6k_2 + 6k_3 - k_4)\right| < \frac{22}{20}\frac{h^3}{6} < \frac{h^3}{4}$$
$$|k'| = |k_1 + k_2 + k_3| < 3\frac{h^3}{6} = \frac{h^3}{2}$$
$$|k''| = \left|\frac{1}{2}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right| < \frac{1}{2}6\frac{h^3}{6} = \frac{h^3}{2}$$

Igy a második oszlopban lévő

a/ $y_{n-1} + \alpha v_{1n-1} + \beta v_{2n-1} + \gamma k_i$ tipusu közbülső összegekre
$(\alpha \leq 1,\ \beta \leq 1\ \ \gamma \leq 1)$
$$|y_{n-1} + \alpha v_{1n-1} + \beta v_{2n-1} + \gamma k_i| < |y_{n-1}| + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + h$$
s $|y_{n-1}| + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} \leq 1 - 2^{-30}$ ha
$$|y_{n-1}| \leq 1 - 2^{-30} - \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\right)$$
Ezzel a két tagból képzett összegekre is biztositottuk a tulcsordulás elkerülését.

A harmadik oszlopban lévő
$$v_{1n-1} + p v_{2n-1} + q k_i \qquad \text{b/}$$
$$(p \leq 2\quad q \leq 3)$$
tipusu összegekre
$$|v_{1n-1} + p v_{2n-1} + q k_i| < h + 2\frac{h^2}{2} + 3\frac{h^3}{6} = h + h^2 + \frac{h^3}{2}$$
Látható, hogy két-két tagon sem lép fel tulcsordulás, tehát a $v_{2n-1} + q k_i$ összegnél sem.

Hasonló meggondolással, mint az első és másodrendűnél látható, hogy ha alkalmasan választott K korlátokra

1/ $|x| \leq K_0$ $|y'''| \leq 1 - 2^{-30}$ és $|y_0| \leq K_1$ $|y_0'| \leq K_2 < 1$
$|y_0''| \leq K_3 < 1$

akkor
$$|y| \leq M_0$$
$$|y'| \leq M_1$$
$$|y''| \leq M_2$$

Pozicióelosztás

Legyen az $f/x_n,y_n,y'_n,y''_n/$-t kiszámitó szubrutin az α-tól α+k-1-ig terjedő poziciókban. s ebben a szubrutinban fix poziciókként jelöljük ki a következőket.

x_n	helye	mindig	0001	
y_n	"	"	0002	
y'_n	"	"	0003	
y''_n	"	"	0004	legyen

Az $f/x_n,y_n,y'_n,y''_n/$-t mindig 0005-ben helyezzük el, s a szubrutinból való kiugráskor mindig 0006-nak adják át a vezérlést.

/0010/= 24 Πy α 7777

Konstansok.

/0011/= $\frac{1}{2}$

/0012/= $\frac{1}{4}$

/0013/= $\frac{1}{8}$

/0014/= $\frac{3}{4}$

/0015/= $\frac{2}{3}$

/0016/= $\frac{1}{3}$

/0017/= $\frac{1}{6}$

/0020/= $\frac{1}{20}$

/0021/= 24 Πy 0112 7777

/0022/= 24 Πy 0144 7777

/0023/= 00 0009 0000
3

/0024/= 24 Πy 0171 7777

Paraméterek

/0025/= 04 0211 0001

/0026/= ϑ

/0030/= x_0= a

/0031/= y_0

/0032/= y'_0

/0033/= y''_0

/0034/= h

/0035/= ε

/0036/= b

Munkapoziciók

0037 0040 0041 0042 0043 0044
0045 0046 0047 0050 0051

Program

0100	Пс	05	0030	0001
0101	Пс	05	0031	0002
0102	Пс	05	0032	0003
0103	Пс	05	0033	0004
0104	→	11	0034	0036
0105	↓+	20	0000	0037
0106	×,	13	0034	0011
0107	↓+	20	0000	0040
0110	↓×	23	0034	0041
0111	↓×,	33	0016	7777
0112	↓×	23	0034	0042
0113	×,	13	0003	0034
0114	↓+,	20	0000	0044
0115	×,	13	0004	0041
0116	↓+	20	0000	0045
0117	Пс	05	0002	0043
0120	Пс	05	0021	0006
0121	Пу	24	0010	7777
0122	×	03	0042	0005
0123	Пс	05	0005	0046
0124	+	00	0040	0001
0125	×,	13	0044	0011
0126	↓+	20	0043	0002
0127	×,	13	0045	0012
0130	↓+	20	0002	0002
0131	×,	13	0005	0013
0132	↓+	20	0002	0002
0133	×,	13	0014	0005
0134	↓+,	30	0044	7777
0135	↓+,	30	0045	7777
0136	↓:	22	0034	0003

0137	Πz	05	0022	0006	
0140	:,	12	0015	0005	
0141	↓+,	30	0045	----	
0142	↓:,	32	0041	----	
0143	Πy	24	0010	0004	
0144	+	00	0023	0006	
0145	×	03	0042	0005	
0146	Πy	24	0140	0047	It_2
0147	×	03	0042	0005	
0150	−,	11	0047	0046	
0151	↓×	23	0035	0050	
0152	−,	11	0005	0047	
0153	↓|−|,	71	0050	----	
0154	YΠ	34	0155	0213	
0155	+	00	0040	0001	
0156	:,	12	0016	0005	
0157	↓+	20	0045	0004	
0160	+	00	0045	0044	
0161	↓+	20	0004	0050	
0162	↓:	22	0034	0003	
0162	:	02	0041	0004	
0164	+	00	0005	0047	
0165	Πz	05	0024	0006	
0166	+	00	0044	0043	
0167	↓+	20	0005	0002	
0170	Πy	24	0010	----	
0171	×	03	0042	0005	
0172	↓+,	30	0046	----	
0173	↓×,	33	0011	----	
0174	↓+,	30	0047	----	
0175	↓+	20	0045	0004	
0176	+	00	0046	0047	
0177	↓+,	30	0044	----	
0200	↓+	20	0045	0003	
0201	:	02	0017	0047	
0202	:,	12	0016	0046	
0203	↓+,	30	0047	----	
0204	↓−,	31	0005	----	

o2o5	↓×,	33	oo2o	----
o2o6	↓+	2o	oo43	ooo2
o2o7	Πz	o5	oo25	β
o21o	Πy	24	β+2	----
o211	−,	11	ooo1	oo37
o212	yΠ	34	megáll	o117
o213	−	o1	oo4o	ooo1
o214	Πz	o5	oo43	ooo2
o215	:,	12	oo34	oo44
o216	↓+	2o	oooo	ooo3
o217	:,	12	oo41	oo45
o22o	↓+	2o	oooo	ooo4
o221	×.	o3	oo11	oo34
o222	−,	11	oo34	oo26
o223	yΠ.	34	o1o4	megáll

Negyedrendü differenciálegyenlet Runge-Kutta módszerének programja

Legyen adva az $y''' = f/x, y, y', y'', y'''/$ differenciálegyenlet az $y/x_0/=y_0$ $y'/x_0/=y'_0$ $y''/x_0/=y''_0$ $y'''/x_0/=y'''_0$ kezdeti feltételekkel. Ennek közelitő numerikus megoldását az /ab/ intervallumban Runge-Kutta mószer szerint skövetkező séma alapján számithajtuk ki.

x	y
x_{n-1} 8	y_{n-1}
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}v_{1n-1}+\frac{1}{4}v_{2n-1}+\frac{1}{8}v_{3n-1}+\frac{1}{16}k_1$
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}v_{1n-1}+\frac{1}{4}v_{2n-1}+\frac{1}{8}v_{3n-1}+\frac{1}{16}k_1$
$x_{n-1}+h$	$y_{n-1}+v_{1b-1}+v_{2n-1}+v_{3n-1}+k_3$
$x_n=x_{n-1}+h$	$y_n=y_{n-1}+n_{1n-1}+v_{2n-1}+v_{3n-1}+k_3$

$hy'=v_1$
v_{1n-1}
$v_{1n-1}+v_{2n-1}+\frac{3}{4}v_{3n-1}+\frac{1}{2}k_1$
$v_{1n-1}+v_{2n-1}+\frac{3}{4}v_{3n-1}+\frac{1}{2}k_1$
$v_{1n-1}+2v_{2n-1}+3v_{3n-1}+4k_3$

$v_{1n} = v_{1n-1} + 2v_{2n-1} + 3v_{3n-1} + k'$

$\frac{h^2}{2}y'' = v_2$	$\frac{h^3}{6}y''=v_3$	$k=\frac{h^4}{24}\,f/x,y,\frac{v_1}{h},\frac{2v_2}{h^2},\frac{6v_3}{h^3})$	
v_{2n-1}	v_{2n-1}	k_1	k
$v_{2n-1}+\frac{3}{2}v_{3n-1}+\frac{3}{2}k_1$	$v_{3n-1}+2k_1$	k_2	k'
$v_{2n-1}+\frac{3}{2}v_{3n-1}+\frac{3}{2}k_1$	$v_{3n-1}+2k_2$	k_3	k''
$v_{2n-1}+3v_{3n-1}+6k_3$	$v_{3n}+4k_3$	k_4	k''
$v_{2n}=v_{2n-1}+3v_{3n-1}+k''$	$v_{3n}=v_{3n-1}+k''$		

itt: $k=\frac{1}{15}/8k_1+4k_2+4k_3+k_4/,$

$k'=\frac{1}{5}/9k_1+6k_2+6k_3-k_4/,$

$k''=2/k_1+k_2+k_3/,$

$k''=\frac{2}{3}/k_1+2k_2+2k_3+k_4/.$

A közbülső eredmények vizsgálata

A feltevés szerint

$|y^{IV}| < 1 \qquad |y'''| \le K_3 < 1 \qquad |y''| \le K_2 < 1 \qquad |y'| \le K_1 < 1 \qquad |y| \le K_0 < 1$

$|x| < 1$

Igy
$$|v_{1n-1}| = |h y'| < h$$
$$|v_{2n-1}| = \left|\frac{h^2}{2} y''\right| < \frac{h^2}{2}$$
$$|v_{3n-1}| = \left|\frac{h^3}{6} y'''\right| < \frac{h^3}{6}$$
$$|k_i| = \left|\frac{h^4}{24} f(x, y, y', y'', y''')\right| < \frac{h^4}{24}$$
$$|k| = \left|\frac{1}{15}(8k_1 + 4k_2 + 4k_3 - k_4)\right| < \frac{17}{15}$$
$$|k'| = \left|\frac{1}{5}(9k_1 + 6k_2 + 6k_3 - k_4)\right| < \frac{1}{5}\, 22 \frac{h^4}{24} < \frac{h^4}{5}$$
$$|k''| = |2(k_1 + k_2 + k_3)| < 2.3 \frac{h^4}{24} = \frac{h^4}{4}$$
$$|k'''| = \left|\frac{2}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right| < \frac{2}{3}\, 6 \frac{h^4}{24}$$

Ha két-két tagonként is képezzük ezeket az összegeket, akkor nincs tulcsordulás.

Az $y_{n-1} + \alpha v_{1n-1} + \beta v_{2n-1} + \gamma v_{3n-1} + \delta k_i$ itpusu közbülső eredményekre a következő becslést adhatjuk: $(\alpha \le 1 \quad \beta \le 1 \quad \gamma \le 1 \quad \delta \le 1)$

$$|y_{n-1} + \alpha v_{1n-1} + \beta v_{2n-1} + \gamma v_{3n-1} + \delta k_i| <$$
$$< |y_{n-1}| + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} \le 1 - 2^{-30} \text{ ha}$$
$$|y_{n-1}| \le 1 - 2^{-30} - \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right)$$

Látható, hogy az összegezést két-két tagonként hajtva végre, tulcsordulás nem lép fel.

A $v_{1n-1} + p v_{2n-1} + q v_{3n-1} + r k_i$ összegre $(p \le 2 \quad q \le 3 \quad r \le 4)$

$$|v_{1n-1} + p v_{2n-1} + q v_{3n-1} + r k_i| < h + h^2 + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{6}$$

A $(v_{2n-1} + \delta v_{3n-1} + \vartheta k_i)$-re $(\delta \le 3 \quad \vartheta \le 6)$

$$|v_{2n-1} + \delta v_{3n-1} + \vartheta k_i| < \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{4}$$

Tehát $K=1-2^{-30}\cdot\left(h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24}\right)-\varepsilon$ -et véve /1/ feltétel biztositja a tulcsordulás elkerülését. $(|y(x_i)-y_i|<\varepsilon \quad x_i\in(a,b))$

Hasonló meggondolással, mint az első és másodrendünél belátható, hogy ha alkalmasan választott K korlátokra

$$|x|\le \eta_0<1 \quad |y''|\le 1-2^{-30} \quad |y_0|<\eta_1<1$$
$$|y_0'|<\eta_2<1 \quad |y_0''|\le \eta_3<1 \quad |y_0'''|\le \eta_4<1$$

akkor

$$|y|<M_0<1$$
$$|y'|<1$$
$$|y''|<1$$
$$|y'''|<1$$

azaz, /1/ feltétel teljesül.

Pozicióelosztás

Legyen az $f/x_n, y_n, y'_n, y''_n, y'''_n/$-t kiszámitó szubrutin az α -tól α +k-1-ig terjedő poziciókban s ebben a szubrutinban fix poziciókként jelöljük ki a következőket:

x_n helye mindig 0001

y_n helye mindig 0002

y'_n helye mindig 0003

y''_n helye mindig 0004

y'''_n helye mindig 0005 legyen

Az $f/x_n, y_n, y''_n, y''_n$ /-t mindig 0006-ben helyezzük el, s a szubrutinból való kiugráskor mindig 0007-nek adjuk át a vezérlést. /0010Ø=Ty 24 α 7777.

Konstansok

/oo11/= $\frac{1}{2}$

/oo12/= $\frac{1}{4}$

/oo13/= $\frac{1}{8}$

/oo14/= $\frac{1}{16}$

/oo15/= $\frac{3}{4}$

/oo16/= $\frac{2}{3}$

/oo17/= $\frac{1}{3}$

/oo2o/= $\frac{1}{6}$

/oo21/= n o252 ooo1

/oo22/= $\frac{1}{5}$

/oo24/= $\frac{1}{15}$

/oo25/= 24 Ty o13o

/oo26/= 24 Ty o162 oooo

/oo27/= oo ooo3 oooo

/oo3o/= 24 Ty o22o oooo

Paraméterek

/oo31/= x_o

/oo32/= y_o

/oo33/= y'_o

/oo34/= y''_n

/oo35/= y''_o

/oo36/= h

/oo37/= b

/oo4o/= ε

/oo41/= σ

Munkapoziciók

/oo51/=	oo42	oo43	oo44	oo45	oo46	oo47
/oo52/	oo5o	oo56	oo57	oo6o	oo61	
/oo53/						
/oo54/						
/oo55/						

Program

0101	Πτ	05		0031	0001
0102	Πτ	05		0032	0002
0103	Πτ	05		0033	0003
0104	Πτ	05		0034	0004
0105	Πτ	05		0035	0005
0106	−,	11		0036	0037
0107	↓+	20		0000	0051
0110	×,	13		0011	0036
0111	↓+	20		0000	0052
0112	↓×	23		0036	0053
0113	↓×,	33	3	0017	7777
0114	↓×	23		0036	0054
0115	↓×,	33		0012	7777
0116	↓×	23		0036	0055
0117	×,	13		0036	0003
0110	↓+	20		0000	0057
0121	×,	13		0053	0004
0122	↓+	20		0000	0060
0123	×,	13		0054	0005
0124	↓+	20		0000	0061
0125	Πτ	05		0002	0056
0126	Πτ	05		0025	0007
0127	Πγ	24		0010	7777
0130	×	03		0055	0006
0131	Πe	05		0006	0042
0132	+	00		0052	0001
0133	×,	13		0011	0057
0134	↓+	20		0056	0002
0135	×,	13		0060	0012
0136	↓+	20		0002	0002
0137	×,	13		0061	0013
0140	↓+	20		0002	0002
0141	×,	13		0006	0014
0142	↓+	20		0002	0002
0143	×,	13		0011	0006
0144	↓+	20		0057	0003

0145	×,	13	0061	0015	
0146	↓+,	30	0060	7777	
0147	↓+,	30	0003	7777	
0150	↓:	22	0036	0003	
0151	+,	10	0061	0006	
0152	↓:,	32	0016	7777	
0153	↓+,	30	0060	7777	
0154	↓:	22	0053	0004	
0155	+,	10	0006	0006	
0156	↓+,	30	0061	7777	
0157	↓:	22	0054	0005	
0160	Πτ	05	0026	0007	
0161	Πγ	24	0010	7777	
0162	+	00	0027	0026	
0163	×	03	0055	0006	
0164	Πγ	24	0155	0043	
0165	−	01	0027	0026	
0166	×	03	0055	0006	
0167	Πτ	05	0006	0044	
0170	−)	11	0043	0042	
0171	↓×	23	0040	0007	a lépésköz vizsgálata
0172	−)	11	0044	0043	
0173	↓|−|,	71	0007	7777	
0174	YΠ	34	0175	0253	
0175	+	00	0052	0001	
0176	:,	12	0012	0006	
0177	↓+	20	0061	0005	
0200	+	00	0061	0060	
0201	↓+	20	0057	0050	
0202	↓+	20	0060	0047	
0203	↓+	20	0005	0003	
0204	+,	00	0061	0047	
0205	:,	12	0011	0061	
0206	↓+	20	0060	0046	
0207	:,	12	0020	0006	

0210	↓+	20	0046	0004
0211	+	00	0056	0050
0212	↓+	20	0006	0002
0213	:	02	0036	0003
0214	:	02	0053	0004
0215	:	02	0054	0005
0216	Пτ	05	0030	0007
0217	Пy	24	0010	----
0220	×	03	0055	0006
0221	+	00	0044	0043
0222	↓+	20	0042	0045
0223	↓:,	32	0011	----
0224	↓+	20	0046	0060
0225	↓:	22	0053	0004
0226	+,	10	0043	0006
0227	↓+,	30	0045	---
0230	↓×,	33	0016	----
0231	↓+	20	0061	0061
0232	↓:	22	0054	0005
0233	:,	12	0017	0042
0234	↓−	21	0006	0006
0235	:,	12	0020	0045
0236	↓+	20	0006	0043
0237	+	00	0042	0006
0240	:,	12	0012	0045
0241	↓+,	30	0006	----
0242	↓+,	30	0024	----

o243	↓+	2o	oo5o	ooo2
o244	×,	13	oo22	oo43
o245	↓+	2o	oo47	oo57
o246	↓:	22	oo36	ooo3
o247	Πτ	o5	oo21	β
o25o	Πγ	24	β+2	—
o251	−,	11	ooo1	oo51
o252	γΠ	34	megáll	o125
o253	−	o1	oo52	ooo1
o254	:,	12	oo36	oo57
o255	↓+	2o	oooo	ooo3
o256	:,	12	oo53	oo6o
o257	↓+	2o	oooo	ooo4
o26o	:,	12	oo54	oo61
o261	↓+	2o	oooo	ooo5
o262	Πτ	o5	oo56	ooo2
o263	×	o3	oo11	oo36
o264	↓−,	31	oo41	----
o265	γΠ	34	megáll	o1o6
o266	. . . .			

Lebegőpontos program az $y^{n}=f\ /x,y,y',\dots,y^{n-1}/$ n-edrendü differenciálegyenlet Runge-Kutta módszerrel történő numerikus integrálására.

Az $y^{(\nu)}(x_0)=y_\nu\ (\nu=0,1,\dots n)$ kezdeti feltétellel adott

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots y^{(n-1)}) \qquad 1)$$

n-edrendü differenciálegyenletet elsőrendü differenciálegyenletrendszerré irhatjuk át.

Vezessük be a következő függvényeket:

$$y=\varphi_0,\quad y'=\varphi_1,\quad y''=\varphi_2,\quad \dots\quad y^{(n-1)}=\varphi_{n-1}$$

Igy: $\varphi_0'=\varphi_1\quad \varphi_1'=\varphi_2,\ \dots\ \varphi_{n-2}'=\varphi_{n-1},\ \dots\ y^{(n)}=\varphi_{n-1}'=f(x,\dots\varphi_{n-1})$

tehát egy - az /1/-el ekvivalens - n egyenletből álló elsőrendü differenciál egyenletrendszerhez jutunk, amely formálisan

$$\underline{Y}'(\varphi_0',\dots\varphi_{n-1}')=\underline{F}(\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_{n-1},f)$$

vektoriális alakban irható.

Az igy keletkező rendszert ugy oldhatjuk meg,hogy egyenletenként alkalmazzuk az elsőrendü differenciálegyenletre vonatkozó Runge-Kutta módszert. Felhasználva az elsőrendü differenciálegyenlet megoldására szolgáló Runge-Kutta sémát készitsük el a rendszer megoldási sémáját.

X.	Y. ( )	($\underline{k}_1$; $\underline{k}_2$; $\underline{k}_3$; $\underline{k}_4$).
x_{l-1}	$\varphi_{0,l-1}$ $\varphi_{1,l-1}$ $\vdots$ $\varphi_{n-1,l-1}$	$k_{11} = h\,\varphi_{1,l-1}$ $k_{12} = h\,\varphi_{2,l-1}$ $\vdots$ $k_{1n} = h\,\varphi'_{n-1} = h\,f(x, \varphi_{0,l-1}, \dots \varphi_{n-1,l-1})$
$x_{l-1}+\frac{h}{2}$	$\varphi_{0,l-1}+\frac{1}{2}k_{11}$ $\varphi_{1,l-1}+\frac{1}{2}k_{12}$ $\vdots$ $\varphi_{n-1,l-1}+\frac{1}{2}k_{1n}$	$k_{21} = h\,(\varphi_{1,l-1}+\frac{1}{2}k_{12})$ $k_{22} = h\,(\varphi_{2,l-1}+\frac{1}{2}k_{13})$ $\vdots$ $k_{2n} = h\,\varphi'_{n-1} = h\,f(x_{l-1}+\frac{h}{2}, \varphi_{0,l-1}+\frac{1}{2}k_{11}, \dots, \varphi_{n-1,l-1}+\frac{1}{2}k_{1n})$
$x_{l-1}+\frac{h}{2}$	$\varphi_{0,l-1}+\frac{1}{2}k_{21}$ $\varphi_{1,l-1}+\frac{1}{2}k_{22}$ $\vdots$ $\varphi_{n-1,l-1}+\frac{1}{2}k_{2n}$	$k_{31} = h\,(\varphi_{1,l-1}+\frac{1}{2}k_{22})$ $k_{32} = h\,(\varphi_{2,l-1}+\frac{1}{2}k_{23})$ $\vdots$ $k_{3n} = h\,f(x_{l-1}+\frac{h}{2}; \varphi_{0,l-1}+\frac{1}{2}k_{21}, \dots \varphi_{n-1,l-1}+\frac{1}{2}k_{2n})$
$x_{l-1}+h$	$\varphi_{0,l-1}+\frac{1}{2}k_{31}$ $\varphi_{0,l-1}+\frac{1}{2}k_{32}$ $\vdots$ $\varphi_{n-1,l-1}+\frac{1}{2}k_{3n}$	$k_{41} = h\,(\varphi_{1,l-1}+\frac{1}{2}k_{32})$ $k_{42} = h\,(\varphi_{2,l-1}+\frac{1}{2}k_{33})$ $\vdots$ $k_{4n} = h\,f(x_{l-1}+h, \varphi_{0,l-1}+\frac{1}{2}k_{31}, \dots, \varphi_{n-1,l-1}+\frac{1}{2}k_{3n})$
$x_l = x_{l-1}+h$	$\varphi_{0l} = \varphi_{0,l-1}+\frac{1}{2}\underline{k}_1 = y_1$ $\varphi_{1,l} = \varphi_{1,l-1}+\frac{1}{2}\underline{k}_2 = y_1'$ $\vdots$ $\varphi_{n-1,l} = \varphi_{n-1,l-1}+\frac{1}{2}\underline{k}_n = y_1^{(n-1)}$	ahol: $\underline{k} = \underline{k}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{1}{6}(\underline{k}_1 + 2\underline{k}_2 + 2\underline{k}_3 + \underline{k}_4)$. és $\underline{k}_i = \underline{k}_i(k_{i1}, k_{i2}, \dots k_{in})$ $(i = 1,2,3,4)$

A lépésköz megválasztása ugyanugy, mint az elsőrendü esetben a

$$\frac{|k_{2i} - k_{3i}|}{|k_{1i} - k_{2i}|} < \varepsilon$$

egyenlőtlenség vizsgálatával történik $(i = 1, 2, \ldots n$ / ε egy előre megadott szám: $\frac{4}{100})$

Ha az egyenlőtlenség nem teljesül, akkor felezzük a lépésközt és ezzel a lépésközzel számolunk tovább.

Pozicióelosztás.

Legyen az $f(x, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1})$-t kiszámitó szubrutin az A-tól A+k-1-ig terjedő poziciókban elhelyezve s A+k=74 Πy – 0026 legyen.

Legyen ebben a szubrutinban x helye /0130, 0131/

s ξ_1 helye /0132+2i, 0133+2i/ i=o,1,..

A $\xi'_{n-1} = f(x, \xi_1, \ldots \xi_{n-1})$ helye /P,P+1/

A lebegőpontos müveleteket a lebegőpontos szubrutin végzi el mindenegyes lebegőpontos müveletnél erre ugrunk át.

Legyen:

1./ az összeadó szubrutin a p-től p+1-ig

2./ a kivonó " q-től q+1-ig

3./ a szorzó " r-től r+1-ig

4./ az osztó " s-től s+1-ig

5./ a normalizáló " ν-től ν+l-ig terjedő poziciókban elhelyezve s /ν+l/= Πy – z (z az a pozició, ahova a normalizálás után a vezérlést átadjuk.)

Ha $x = d_1 2^{p_1}$ $y = d_2 2^{p_2}$

akkor ebben a szubrutinban legyen:

/P/=d_1 $(Q = P+2) = d_2$

/P+1/=p_1 $(Q+1) = p_2$

A normalizált eredmény mindig /P,P+1/-ben adódik / $\frac{x}{y}$,x-y, x+y, x.y/.

<u>Konstansok</u>

/ooo1/=00 oooo ooo1
/ooo2/=oo ooo1 oooo
/ooo3/=oo ooo2 oooo
/ooo4/=oo oooo ooo2
/ooo5/=oo oooo ooo3 ooo
/ooo6/=oo oooo ooo4
/ooo7/= $\frac{1}{6}$ =/oo1o/
/oo11/=oo ooo2 ooo2
/oo12/=2^{-12}
/oo13/=o4 o13o o447
/oo14/=74 Ty ---- o33o
/oo15/=oo oooo ooo6
/oo16/=o5 Tc o57o P
/oo17/=o5 Tc o571 P+1
/oo2o/=74 Ty ---- o3oo
/oo21/=74 Ty ---- o317
/oo22/=74 Ty ---- o326
/oo23/=o5 Tc o132 P
/oo24/=74 Ty ---- o33o
/oo25/=21 ↓- ooo1 P_{+1}
/oo26/=74 Ty ---- o3o3
/oo27/=74 Ty ---- o4o4
/oo3o/=24 Ty o252 o132
/oo31/=10 +, oo61 o571
/oo32/=o5 Tc o5 P o1o2
/oo33/=74 Ty ---- o473
/oo34/=74 Ty ---- o525
/oo35/=74 oooo o334/-/o5 a o132/
/oo36/=oo ooo4 ooo5
/oo37/=34 yT o336 o345
/o27o/=o5 Tc P o566
/o271/=o5 Tc P+1 . o567

Paraméterek

/oo4o/=h=oo41

/oo4o/=$\frac{h}{2}$=oo42

/oo43/= 2n

/oo44/74 Fy - A

/oo45/= 6 = oo46

/oo47/= $^{2}\log \epsilon$

/o2oo,o2o1/=x_o

/o2o2,o2o3/=$\varphi_{oo}=y_o$

/o2o4,o2o5/=$\varphi_{1o}=y_o'$

/o2o6,o2o7/=$\varphi_{2o}=y_o''$

.

.

/o2oo+2n-2,o2o1+2n-2/=$\varphi_{n-1o}=y_o^{/n-1/}$

Munkapoziciók

oo5o

oo51

oo52

oo53

oo54

oo55

oo56

oo57

oo6o

oo61

oo62

oo63

oo64

oo65

o1oo-o127

o57o-o67o

P r o g r a m

Előkészités

o23o	12	:,	oo12	oo43	
o231	24	Πγ	o232	oo5o	→ /oo 2n oooo/
o232	2o	↓+	ooo4	oo56	→ /oo 2n ooo2/
o233	21	↓-	oo11	oo51	→ /oo 2n-2 oooo/
o234	11	-,	ooo4	oo43	
o235	24	Πγ	o236	oo52	→ /oo oooo 2n-2/
o236	2o	↓+	oo3o	oo55	→ / o271 o132+2n-2/
o237	1o	+,	oo43	oo43	
o24o	24	Πγ	o241	oo53	→ /oo oooo 4n/
o241	21	↓-	ooo4	oo65	→ /oo oooo 4n-2/
o242	1o	+,	oo5o	oo43	
o243	24	Πγ	o244	oo54	→ /oo 2n 2n/
o244	1o	+,	oo43	oo31	
o245	24	Πγ	o246	oo57	→ /+, oo61 oo51+2n/
o246	o5	Πτ	o2oo	o13o	
o247	o5	Πτ	o2o1	o131	
o25o	o5	Πτ	o2o2	o1oo	
o251	24	Πγ	o252	o132	
o252	o5	Πτ	o2o3	o1o1	
o253	24	Πγ	o254	o133	
o254	oo	+	oo11	o25o	
o255	oo	+	oo11	o252	
o256	oo	+	ooo4	o251	
o257	oo	+	ooo4	o253	
o260	11	-,	o251	oo55	
o261	34	γΓ	o262	o25o	
o262	o1	−	oo54	o25o	
o263	o1	−	oo54	o252	
o264	o1	−	oo43	o251	
o265	o1	−	oo43	o253	
o266	o5	Πτ	oo44	o3o2	
o267	74	Πγ	----	o3o2	
----	--		----	----	

0272	05	Пτ	0040	Q
0273	05	Пτ	0042	Q+1
0274	05	Пτ	0130	P
0275	05	Пτ	0131	P+1
0276	05	Пτ	0020	ν+l
0277	74	Пγ	----	ν
0300	05	Пτ	P	0130
0301	05	Пτ	P+1	0131
0302		/.......		..../
0303	00	+	0052	0332
0304	00	+	0052	0333
0305	00	+	0051	0322
0306	00	+	0051	0323
0307	00	+	0051	0330
0310	00	+	0051	0331
0311	00	+	0004	0317
0312	00	+	0004	0320
0313	03	×	0040	P
0314	00	+	0041	P+1
0315	05	Пτ	0021	ν+l
0316	74	Пγ	----	ν
0317	05	/ Пτ	P	0566/
0320	05	/ Пτ	P+1	0567/
0321	21	↓−.	0001	P+1
0322	05	/ Пτ	0100+ 2n-2	/Q
0323	05	/ Пτ	0101+ 2n-2	Q+1/
0324	05	Пτ	0022	ν+l
0325	74	Пγ	----	p
0326	05	Пτ	P	Q
0327	05	Пτ	P+1	Q+1
0330	05	/ Пτ	0132+ 2n-2	P
0331	05	/ Пτ	0133+ 2n-2 +1	P+1
0332	05	Пτ	+1 Q	0132+ 2n-2 /
0333	05	Пτ	Q+1	0133+ 2n-2/
0334	11	¬	0330	0023
0335	34	УП	0336	0345
0336	01	−	0003	0322
0337	01	−	0003	0323
0340	01	−	0004	0332
0341	01	−	0004	0333
0342	01	−	0003	0330

+1

$(x_0 + \frac{h}{2})$

0343	01	−	0003	0331
0344	74	Пу	----	0311
0345	00	+	0004	0335
0346	74	Пу	----	0272 /0272/
0347	05	Пτ	0014	0321
0350	00	+	0005	0335
0351	74	Пу	----	0302
0352	05	Пτ	0024	0321
0353	00	+	0006	0026
0354	00	+	0035	0332
0355	00	+	0036	0335
0356	74	Пу	----	0272
0357	05	Пτ	0025	0321
0360	01	−	0006	0026
0361	01	−	0035	0332
0362	05	Пτ	0037	0335
0363	74	Пу	----	0455
0364	00	+	0051	0417
0365	00	+	0051	0420
0366	00	+	0052	0423
0367	00	+	0052	0424
0370	00	+	0052	0425
0371	00	+	0052	0426
0372	05	Пτ	0057	0402
0373	05	Пτ	0001	0061
0374	05	Пτ	0027	$\gamma+\ell$
0375	05	Пτ	0570	P
0376	05	Пτ	0571	$P+1$
0377	10	+,	0056	0375
0400	24	Пу	0401	0401
0401		/..	....	..../
0402	10	+,	0061	0571+2n/
0403	24	Пу	P	$Q+1$
0404	00	+	0050	0401
0405	00	+	0043	0402
0406	00	+	0006	$\gamma+\ell$
0407	74	Пу	----	0401
0410	05	Пτ	0000	0061
0411	01	−	0001	$\gamma+\ell$
0412	74	Пу	----	0404
0413	03	×	0010	P

o414	oo	+	ooo7	P+1	
o415	oo	+	ooo6	ν+ℓ	
o416	74	Πγ	----	ν	
o417	o5	Πτ	oloo + 2n-2	Q	
o42o	o5	Πτ	olol+ 2n-2	Q+1	
o421	oo	+	ooo6	ν+ℓ	
o422	74	Πγ	----	p	
o423	o5	(Πτ	P	oloo+ 2n-2)	
o424	24	(Πγ	o425	o132+ 2n-2)	
o425	o5	Πτ	P+1	olol" 2n-2)	
o426	24	Πγ	o427	o133+ 2n-2)	
o427	11	−,	oo32	o423	
o43o	34	YΠ	o431	o443	
o431	ol	−	ooo3	o417	
o432	ol	−	ooo3	o42o	
o433	ol	−	ooo4	o423	
o434	ol	−	ooo4	o424	
o435	ol	−	ooo4	o425	
o436	ol	−	ooo4	o426	
o437	oo	+	ooo3	o375	
o44o	oo	+	ooo3	o376	
o441	ol	−	oo65	o4o2	
o442	74	Πγ	----	o373	
o443	ol	−	oo51	o375	
o444	ol	−	oo51	o376	
o445	o5	Πτ	oo13	β	konvertálás és
o446	74	Πγ	----	β'	kinyomtatás
o447	11	−)	o131	oo45	
o45o	71	↓|−1,	ooo1	----	
o451	34	YΠ	o3o2	o452	
o452	11	−,	o132	oo46	
o453	71	↓|−1,	ooo1	----	
o454	34	YΠ	o3o2	megáll	
o455	1o	+,	oo51	oo52	
o456	2o	↓+	o531	oo64	
o457	1o	+,	oo51	o461	
o46o	24	Πγ	o461	oo63	
o461	o5	Πτ	o57o	P	
o462	o5	Πτ	o571	P +1	
o463	1o	+,	oo56	o461	

0464	24	Πγ	0465	0467
0465	10	+,	0056	0462
0466	24	Πγ	0467	0470
0467		/	....	.... /
0470		/	....	.... /
0471	05	Πτ	0033	ν+ℓ
0472	74	Πγ	----	q
0473	05	Πτ	P	0060
0474	05	Πτ	P+1	0061
0475	00	+	0050	0461
0476	00	+	0050	0462
0477	00	+	0015	0033
0500	74	Πγ	----	0461
0501	00	+	0047	0061
0502	01	−	0061	P+1
0503	71	↓I−I,	0001	----
0504	34	YΠ	0505	0507
0505	51	I−I,	0060	P
0506	24	Πγ	0510	----
0507	05	Πτ	P+1	~~P+1~~
0510	34	YΠ	0511	0521
0511	01	−	0051	0461
0512	01	−	0051	0462
0513	01	−	0015	0033
0514	11	−,	0461	0063
0515	34	YΠ	0516	0461
0516	01	−	0050	0461
0517	01	−	0050	0462
0520	74	Πγ	----	0364
0521	01	−	0004	0277
0522	05	Πτ	0034	0302
0523	01	−	0002	0273
0524	74	Πγ	----	0272
0525	00	+	0002	0273
0526	00	+	0004	0277
0527	01	−	0001	0041
0530	01	−	0001	0042

0531	05	Пс	0100	0132
0532	05	Пс	0101	0133
0533	00	+	0011	0531
0534	00	+	0011	0532
0535	11	−,	0531	0064
0536	34	УП	0537	0531
0537	01	−	0054	0531
0540	01	−	0054	0532
0541	01	−	0270	0033
0542	05	Пс	0271	0317
0543	05	Пс	0017	0320
0544	74	Пу	----	0266

Közönséges differenciálegyenletek megoldása differencia-módszerekkel

1./ Elsőrendü differenciálegyenlet.

Legyen adva az

$$y'=f/x,y/ \qquad /1,1/$$

differenciálegyenlet az $y/x_0/=y_0$ kezdeti feltétellel az ab intervallumban.

Az ezen differenciálegyenlet numerikus integrálására szolgáló differenciamódszerek képleteit ugy nyerjük, hogy az /1,1/ helyett az /1,1/-el ekvivalens

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))\,dx \qquad /1,2/$$

integrálegyenletet oldjuk meg, mégpedig ugy, hogy a megoldást pontonként állitjuk elő.

Igy

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))\,dx \qquad /1,3/$$

Az /1,3/-ben szereplő integrált ugy számitjuk ki, hogy az integrandust valamilyen interpolációs formulával helyettesitjük. Az interpolációs formulától függően több módszer adódik.

Extrapolációs módszer.

Ennél a módszernél $f/(x,y/(x))$-et olyan polinómmal interpoláljuk, amely az $x_{r-p},\dots,x_{r-1},x_r$ pontokban az $f_{r-p},\dots,f_{r-1},f_r$

értékeket veszi fel, ahol $f_r = f/x_r, y_r/$

Ilyen tulajdonságu az

$$N_p(x) = f_{r-p} + \frac{u}{1!}\nabla f_{r-p} + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 f_{r-p} + \dots$$

$$+ \frac{u(u+1)\dots(u+p-1)}{p!}\nabla^p f_{r-p}$$ Newton-polinom,

ahol $u = \frac{x - x_{r-p}}{h}$ s $\nabla^m f_k = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} f_{k+m-i}$

Beirva $N_p/x/$-et /1,3/-ba

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\sum_{\nu=0}^{p} \beta_\nu \nabla^\nu f(x_n, y(x_n)) + S_{p+1}$$ képlethez jutunk,

ahol

$$|S_{p+1}| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{u(u+1)\dots(u+p)}{(p+1)!} h^{p+1} f^{(p+1)}(\xi)\,dx \right| \le$$

$$\le h^{p+2} \beta_{p+1} |f^{(p+1)}|_{max}$$

$$\text{s} \quad \beta_\nu = \frac{1}{\nu!}\int_0^1 u(u+1)\dots(u+\nu-1)\,du.$$

Ha S_{p+1}-et elhagyjuk, s $y/x_n/$ helyett a valamilyen módon már kiszámitott y_n-t vesszük, akkor

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{\nu=0}^{p} \beta_\nu \nabla^\nu f_n$$ képlet adódik.

A β_ν együtthatókat kiszámitva nyerjük Adams extrapolációs képletét.:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n + \dots\right]$$

Ha /1,3/ helyett az

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\,dx$$ integrálegyenletet használjuk

akkor a Nyström képlethez jutunk.

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left[2f_n + \frac{1}{3}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n + \dots\right]$$

Interpolációs módszer.

Az egyik interpolációs módszer Adamstól származik, s lényege az, hogy az $f/x, y/x/)$ integrandust /1,3/-ban olyan interpolációs polinómmal helyettesitjük, amely az $x_{n-p+1}, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}$ pontokban az $f_{n-p+1}, \dots, f_{n-1}, f_{n+1}$ értékeket veszi fel.

$$y_{r+1}^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \frac{h^{\nu}}{\nu!} y_r^{(m+\nu)} + h^{n-m} \sum_{\varrho=0}^{p} \beta_{n-m,\varrho} \nabla^{\varrho} f_r$$

képlethez jutunk / $f_r = f/x_r, y_r, \dots, y_r^{/n-1/})$

ahol

$$\beta_{m\varrho} = \int_0^1 \int_0^u \dots \int_0^u \frac{u(u+1) \dots (u+\varrho-1)}{\varrho!} du\, du \dots du.$$

Az együtthatókat kiszámitva n=2 és m=0, ill. m=1-re az

$$y_{r+1} = y_r + h y'_r + h^2 \left[\frac{1}{2} f_r + \frac{1}{6} \nabla f_r + \frac{1}{8} \nabla^2 f_r + \frac{19}{180} \nabla^3 f_r + \dots \right].$$

$$y'_{r+1} = y'_r + h \left[f_r + \frac{1}{2} \nabla f_r + \frac{5}{12} \nabla^2 f_r + \frac{3}{8} \nabla^3 f_r + \dots \right].$$

Adams féle képlethez jutunk.

Beprogramozzuk a lényegében hasonló módon nyert Strőmer Nyström módszert is /Lásd Collatz i.m. old./

A szóbanforgó módszerekhez elkészitünk egy differencia-képző szubrutint ; a differenciaképzés ezen szubrutin behívásával történik.

A programok fix ponttal müködnek, ezért ügyelni kell arra, hogy minden szereplő adat 1-nél abszolut értékben kisebb legyen.

Tegyük fel tehát, hogy a

$y^{/n/} = f/x, y, \dots, y^{n-1}/$ differenciálegyenletben

$|y| < K_0, |y'| < K_1, \dots |y^{(n)}| < 1 \quad |x| < 1 \quad (n=1,2)$

/Valamilyen $X = u(x,y)$ $Y = v(x,y)$ $\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0 \right)$ transzformációval ilyen alakra hoztuk./ A K_i konstansokat a közbülső eredmények vizsgálatából határozzuk meg.

A lépésközre feltesszük, hogy $|h| < 0{,}1$

/Ez nem lényeges megszoritás, lévén $|x| < 1$ /

Igy nyerjük, hogy

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\sum_{\nu=0}^{p}\beta_\nu^* \nabla^\nu f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + S_{p+1}^*$$

ahol

$$\beta_\nu^* = \frac{1}{\nu!}\int_0^1 (u-1)u(u+1)\ldots(u+\nu-2)\,du$$

Az előbbi integrált kiszámítva és $y(x_n)$ helyett y_n közelitő értéket véve S_{p+1}^*-et elhagyva az:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} \ldots\right]$$

Adams féle interpolációs formulához jutunk. Ezt a formulát nem programozzuk be.

Milne-módszer

A Milne-módszer vegyes eljárás, extrapolációs és interpolációs egyaránt. A programozásra azokat a formulákat használjuk fel, amelyek Békéssy András :"Közönséges differenciálegyenletek numerikus integrálása" c. jegyzetének 27 oldalán találhatók.

Másodrendü differenciálegyenletek

Másodrendü differenciálegyenleteknél is extrapolációs módszereket programozunk be. Ezeket a módszereket lényegében ugy nyerjük, mint az elsőrendüekre vonatkozókat, azzal a különbséggel, hogy itt a Newton-féle interpolációs formula n-szeres integráljára vonatkozó formulát használjuk fel /lásd Collatz. i.m. 12.oldal/. Ezen formula segitségével az y_{n+1}^{m} közelitő értékre nézve $/y' = f/x,\ldots,y^{n-1})$ esetén/

Differenciaképző szubrutin.

A következőkben differencia-módszereket programozunk be differenciálegyenletek numerikus integrálására. Ehhez szükségünk lesz differenciaképzésre.

Definiáljuk a ∇ operátort a

$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$ egyenlőséggel /első differencia/

ennek m-edik hatványát a

$\nabla^m f_n = \nabla^{m-1} f_n - \nabla^{m-1} f_{n-1}$ egyenlőséggel /m-edik differencia/

ahol $f_n = f(x_n, y_n, z_n, \ldots v_n)$

Legyen $x_n - x_{n-1} = h.$

Készitsük el a következő táblázatot:

$$
\begin{array}{lllll}
f_0 & & & & \\
 & \nabla f_1 & & & \\
f_1 & & \nabla^2 f_2 & & \\
 & \nabla f_2 & & \nabla^3 f_3 & \\
f_2 & & \nabla^2 f_3 & & \ldots \\
 & \nabla f_3 & & & \\
\vdots & & & & \\
 & \nabla f_{n-2} & & & \\
f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} & & \\
 & \nabla f_{n-1} & & & \nabla^m f_n \\
f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & \nabla^3 f_n & \ldots \\
f_n & \nabla f_n & & \nabla^3 f_{n+1} & \\
 & & \nabla^2 f_{n+1} & & \\
 & \nabla f_{n+1} & & & \\
f_{n+1} & & & &
\end{array}
$$

Látható, hogy $\nabla^i f_m$ $(i=1,\dots,m)$ kiszámitásához szükség van az $f_o, f_1, \dots, f_m$ értékekre, amikor a differenciaképzést elkezdjük. A $\nabla^i f_{m+1}$ képzése azonban már egyszerűbb, ez a sor már képezhető az előző sorból.

A differenciaképző szubrutin tehát két részből áll. Az első részben /0223-tól 0271-ig terjedő poziciókban/ $\nabla^i f_m$-t $(i=1,2,\dots m)$ számitjuk ki, ha $f_o, f_1, \dots, f_m$ adva van, a második rész pedig $\nabla^i f_{m+1}$ kiszámitására alkalmas, ha már ismertjük $\nabla^i f_m$ -t. (0273-tól)

Mivel a gép fixponttal működik, ezért ügyelni kell arra, hogy a szerepelő adatok abszolut értékben egynél kisebbek legyenek.

A $\nabla^m f_n$ differenciára a következő durva becslést lehet adni.

Legyen $|f|<1$

Akkor $|\nabla^m f_n| = \left|\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f_{n-k}\right| \leq$

$$\leq \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} |f_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m$$

A differenciálegyenletek differencia módszerrel történő integrálásánál $h\nabla^i f_n$ -re van szükségünk. $(i=1,2 \dots m)$

Mivel $h\nabla^m f_n = \nabla^m h f_n$, ezért f_n helyett $h\,f_n$-el képezzük a megfelelő differenciákat, mégpedig ugy, hogy az f_n-t kiszámitó szubrutinban f_n helyett hf_n-t számitjuk ki.

Igy $|h\nabla^m f_n| < h\,2^m$

tehát $|h\nabla^m f_n| = |\nabla^m h f_n| < 1$

ha $h\,2^m < 1$

azaz $h < \frac{1}{2^m}$ /Ez nem lényeges megszoritás/

mert $|x|<1$ lévén, ~~ha~~-t elég kicsíkre kell választani/. Ilyen feltételek mellett a differenciaképző szubrutinban nem lép fel tulcsordulás.

A szubrutin használata.

Ha a főprogramban differenciaképzés következik, akkor átugrunk a differenciaképző szubrutinra.

1./ A számitásk kezdetén, a mikor az $f_o, f_1, \ldots, f_m$ függvényértékekből számitjuk a $\nabla^i f_m$ $(i=1,\ldots,4)$ differenciákat, / a szubrutin első része/ o223-ra ugrunk, o27o-be beirjuk, hogy a differenciaképzés után hova adjuk át a vezérlést.

2./ A továbbiakban o237-re, a szubrutin második részére ugrunk ~~tá~~, akkor ugyanis már kiszámitott előző differenciákból számitjuk a szükséges további differenciákat - s o320-ba beirjuk, hogy a differenciaképzés után hova adjuk át a vezérlést.

Mivel a számitás kezdetén / az első szakaszban/az f_o, $f_1, \ldots, f_m$ értékekből számitjuk a differenciákat, ezért meg kell adni az y,z,...,u,v változók első m+1 értékét./Ezekből külön szubrutin képzi az f_i-t./

A $\nabla^i f_{m+1}$ kiszámitásához a következőkben már csak az $y_{m+1}, \ldots u_{m+1}, v_{m+1}$ értékeket kell megadni. Differenciálegyenleteknél ezek az értékek a differenciálegyenlet megoldásai és a megfelelő differenciálhányadosok. Ezeket éppen a differenciálegyenlet megoldását kiszámitó szubrutin számitja ki, s helyezi el a differenciaképző szubrutin megfelelő helyeire.

Pozicióelosztás

Legyen a hf/x,y,u,...,v/-t kiszámitó szubrútin az α -tól α +k-1-ig terjedő pozíciókban elhelyezve; az eredményt a o220-be helyezzük el, $(\alpha+k)$=24 $\Pi\gamma$ o221 legyen.

Legyen az

x	argumentum helye	o2oo
y	helye	o2ol
.		
.		
v	helye	o2oo+ ℓ -1

A kezdőértékeket a következő pozíciókba helyezzük el.

/oo31/= y_0 /oo31+ ℓ /= y_1

/oo32/= u_0 /oo32+ ℓ /= u_1

/oo31+ ℓ -1/= v_0 /oo31+2 ℓ -1/= v_1

Feltesszük, hogy $0 \leq \ell \leq 10$ $0 < m \leq 10$, tehát az itt elfoglalt poziciók a oo31-től o15o-ig terjedők.

o151-től o175-ig a differenciák elhelyezésére szolgáló poziciók.

Konstansok

/ooo1/=oo oooo ooo1
/ooo2/=oo ooo1 oooo
/ooo3/=oo ooo1 ooo1
/ooo4/=o4 ooo1 ooo1
/ooo5/= 2^{-12}
/ooo6/= $\Pi\tau$ o5 oo31 o2o1
/ooo7/= $\Pi\gamma$ 24 o247
/oo1o/= $\Pi\gamma$ 24 o3o6
/oo11/= $\Pi\tau$ o5 o151 o152
/oo12/= – o1 o152 oo24
/oo13/= $\Pi\tau$ o5 oo26 o152
/oo14/= $\Pi\tau$ o5 o22o o152
/oo15/= o5 o222 o31o

Paraméterek:

/oo16/= x_0 =a
/oo17/=h
/oo2o/=24 $\Pi\gamma$ $\alpha - \ell$
/oo21/=oo oooo ooo
/oo22/=oo oooo ooom

Munkapoziciók

oo23
oo24
oo25
oo26
oo27
oo3o

Program

o223	−,	11	ooo1	oo14
o224	Πγ	24	o225	o247
o225	:,	12	ooo5	oo22
o226	↓+	2o	oo22	oo27
o227	↓+	2o	oo11	o255
o23o	↓−	21	ooo4	o256
o231	Πγ	24	o232	oo3o
o232	+,	1o	oo14	oo22
o233	Πγ	24	o234	oo24
o234	−,	11	ooo4	oo11
o235	↓+	2o	ooo3	oo23
o236	Πτ	o5	ooo6	o243
o237	Πτ	o5	ooo7	o221
o24o	Πτ	o5	oo16	o2oo
o241	−,	11	ooo1	oo21
o242	↓+	2o	oooo	oo25
o243	(Πτ	o5	oo31	o2o1)
o244	+	oo	ooo3	o243
o245	−	o1	ooo1	oo25
o246	YΠ	34	oo2o	o243
o247	Πτ	o5	o22o	o151
o25o	+	oo	oo17	o2oo
o251	−	o1	oo21	o243
o252	+	oo	ooo1	o247
o253	↓−,	21	oo24	
o254	YΠ	34	o243	o255
o255	(Πτ	o5	o151+m	o152+m)
o256	(−	o1	o15o+m	o151+m)
o257	−	o1	ooo3	o256
o26o	↓−,	31	oo23	----
o261	YΠ	34	o262	o256
o262	+	oo	ooo3	oo23
o263	+	oo	oo27	o256
o264	−	o1	ooo3	oo27

0265	+	00	0001	0255
0266	−,	11	0023	0030
0267	∨Π	34	0270	0255
0270				
0271				
0272				
0273	Πτ	05	0010	0221
0274	:,	12	0005	0022
0275	↓+	20	0012	0307
0276	+,	10	0022	0013
0277	Πγ	24	0300	0222
0300	↓+	20	0022	0024
0301	Πγ	24	0302	0316
0302	+,	10	0022	0014
0303	Πγ	24	0304	0317
0304	+	00	0017	0200
0305	Πγ	74	----	0020
0306	Πτ	05	0220	0025
0307	(−	01	0152+m	0025
0310	Πτ	05	0222	0310
0311	Πτ	05	0025	0026
0312	+	00	0002	0307
0313	+	00	0001	0310
0314	↓−,	31	0024	----
0315	∨Π	34	0307	0316
0316	Πτ	05	0026	0152+2m
0317	Πτ	05	0220	0152+m
0320	Πτ	05	0015	0310
0321	..	**	----	----

Nyström módszere elsőrendű közönséges differenciálegyenlet megoldására.

Legyen adva az $y'=f/x,y/$ differenciálegyenlet az $y/x_0/y_0$ kezdeti feltétellel, az $a \leq x \leq b$ intervallumban.

Nyström képlete szerint az x_{r+1} pontban a megoldás y_{r+1} közelitő értéke:

$$y_{r+1} = y_{r-1} + \left[2hf_r + \frac{1}{3}\nabla^2 hf_r + \frac{1}{3}\nabla^3 hf_r + \frac{29}{90}\nabla^4 hf_r + \frac{14}{45}\nabla^5 hf_r\right]$$

ahol $f_r = f/x_r, y_r/$

/Lásd Collatz: im. 500 oldal./

A közbülső eredmények viz sgálata.

Minthogy $|\nabla^n hf_r| < h2^n$ ezért

$$|2hf_r + \frac{1}{3}\nabla^2 hf_r + \frac{1}{3}\nabla^3 hf_r + \frac{29}{90}\nabla^4 hf_r + \frac{14}{15}\nabla^5 hf_r| <$$

$$< 2h + \frac{1}{3}4h + \frac{1}{3}8h + \frac{20}{90}16h + \frac{14}{15}32h < 24h$$

Ha $24h < 1$ azaz $h < \frac{1}{24}$ akkor $\left[2hf_r + \frac{1}{3}\nabla^2 hf_r \dots \frac{14}{15}\nabla^5 hf_r\right]$ nem csordul tul.

Ha $|y| < K_0 = 1-\varepsilon$ /ahol ε a közelités pontossága $|y(x_i)-y_i| < \varepsilon$ / akkor nem lép fel tulcsordulás.

Pozicióelosztás

A differenciaképző szubrutin paraméter helyeire beirj a megfelelő paraméter értékeket.

l=1

m=5

Konstansok

/o5oo/= $\frac{1}{2}$

/o5o1/= $\frac{1}{3}$

/o5o2/= $\frac{29}{90}$

/o5o3/= $\frac{14}{15}$

/o5o4/= IIy 74 – o553

/o5o5/=02 o57o o2oo

Paraméterek

/o5o6/= b-h

Munkapoziciók

o5o7

0550	Πτ	05	0504	0270
0551	Πτ	05	0504	0321
0552	Πγ	24	0223	----
0553	+,	10	0161	0162
0554	↓×	23	0501	0507
0555	:,	12	0500	0157
0556	↓+	20	0507	0507
0557	×,	13	0502	0163
0560	↓+	20	0507	0507
0561	×,	13	0503	0164
0562	↓+	20	0507	0507
0563	↓+	20	0035	0201
0564	Πτ	05	0036	0035
0565	Πτ	05	0201	0036
0566	Πτ	05	0505,	β konvertálás és kinyomtatás
0567	Πγ	24	β'	----
0570	−,	11	0200	0506
0571	γΠ	34	0572	0273
0572		megáll		

Elsőrendü közönséges differenciálegyenlet megoldása Adams-féle extrapolációs módszerrel.

Legyen adva az $y'=f/x,y/$ differenciálegyenlet az $a \leq x \leq b$ intervallumban $y'/x_0/=y_0$ kezdeti feltétellel. Ennek az x_{r+1} ponthoz tartozó közelitő megoldását Adams módszere szerint

1/ $$y_{r+1} = y_r + h\left[f_r + \frac{1}{2}\nabla f_r + \frac{5}{12}\nabla^2 f_r + \frac{3}{8}\nabla^3 f_r + \frac{251}{720}\nabla^4 f_r + \frac{95}{288}\nabla^5 f_r + \frac{19087}{60480}\nabla^6 f_r\right]$$ képlet adja,

ahol $f_r = f/x_r, y_r/ = y'_r$

A közbülső eredmények vizsgálata

A feltevés szerint: $|y| < K_0 \quad |y'| < 1 \quad |x| < 1.$

Mivel igy $|\nabla^m h f_m| < 2^m h.$

ezért $$|h f_r + \sum_{k=1}^{m} c_k \nabla^k h f_k| < A_m(h) \qquad (|c_k| < \tfrac{1}{2})$$

Ha h olyan, hogy $|A_m(h)| < 1.$ és $|y| \leq K_0 = 1-\varepsilon$ /ahol $|y(x_i) - y_i| < \varepsilon \quad x_i \in (a,b))$

akkor nem lép fel tulcsordulás.

Pozicióelosztás.

A differenciaképző szubrutin paraméterhelyeire beirjuk a megfelelő paraméterértékeket.

Itt $m \leq 6$

$l = 1$

Konstansok

/o5oo/= $\frac{1}{2}$

/o5o1/= $\frac{5}{12}$

/o5o2/= $\frac{3}{8}$

/o5o3/= $\frac{251}{720}$

/o5o4/= $\frac{95}{288}$

/o5o5/= $\frac{19087}{60480}$

/o5o6/=24ïg o532 —

/o5o7/=+oo o512 o2o1

/o510/=*13 o5oo o153

/o511/= o2 o542 o2oo

Paraméter

/o512/= b-h

Munkapoziciók: o513

o52o	:,	12	ooo5	oo22
o521	Πγ	24	o522	o514
o522	↓+	2o	oo22	oo27
o523	Πτ	o5	o5o6	o27o
o524	Πτ	o5	o5o6	o321
o525	+,	1o	oo22	o51o
o526	Πγ	24	o527	o533
o527	↓+	2o	oo27	o513
o53o	+,	1o	o514	o5o7
o531	Πγ	24	o223	o532
o532	(+	oo	o1524m	o2o1)
o533	(×,	13	o5oo	o153+m)
o534	↓+	2o	o2o1	o2o1
o535	+	oo	ooo3	o533
o536	↓|-|,	71	o513	----
o537	YΠ	34	o533	o54o
o54o	Πτ	o5	o511	β
o541	Πγ	24	β'	
o542	–	o1	oo27	o533
o543	÷,	11	o2oo	o512
o544	YΠ	34	megáll	o273

Störmer Nyström extrapolációs módszere közönséges másodrendű differenciálegyenlet megoldására.

Legyen adva az $y''=f/x,y,y'/$ az $y/x_0/=y_0$ $y'/x_0/=y'_0$ kezdeti feltételekkel az $a \leq x \leq b$ intervallumban. Ennek közelitő numerikus megoldását az x_r pontban Strőmer Nyström módszere szerint:

1/ $y_{r+1} = 2y_r - y_{r-1} + h^2\left(f_r + \frac{1}{12}\nabla^2 f_r + \frac{1}{12}\nabla^3 f_r + \frac{19}{240}\nabla^4 f_r + \right.$
$\left. + \frac{3}{40}\nabla^5 f_r + \frac{863}{12096}\nabla^6 f_r\right)$

2/ $y'_{r+1} = y'_r + h\left[f_r + \frac{1}{2}\nabla f_r + \frac{5}{12}\nabla^2 f_r + \frac{3}{8}\nabla^3 f_r + \frac{251}{720}\nabla^4 f_r \right.$
$\left. + \frac{95}{288}\nabla^5 f_r + \frac{19087}{60480}\nabla^6 f_r\right]$

képletek segitségével számithatjuk ki, ahol

$$f_r = f/x_r, y_r, y'_r/$$

/Lásd Collatz, i.m. 500 old./

Közbülső eredmények vizsgálata

A feltevés szerint: $|y| < K_0$ $|y'| < 1$ $|y''| < 1$

Minthogy $|\nabla^m h f_n| < 2^m h$, igy mind 1/-be mind 2_ben $|c_k| < \frac{1}{2}$ miatt

$H = |h f_r + \sum_{k=1}^{m} c_k \nabla^k h f_m| \leq A_m(h)$; s h-t ugy kell megválasztani, hogy $A_m(h) \leq 1$ legyen.

Ezzel 2/ben már biztositottuk a tulcsordulás elkerülését; ha csak $|y'| < K_0 = 1-\varepsilon'$ (ahol $|y'(x_i) - y'_i| < \varepsilon'$)

1/-ben azonban H helyett hH szerepel, nyilván $|hH| < h$.

s igy $|hH - y_{r-1}| \leq hH + |y_{r-1}|$

De 1/-ben szerepel $2y_r$ is. Nyilván $|2y_r| < 1$ ha $|y_r| < \frac{1}{2}$

Tehát ha $|y| < \frac{1}{2} - \varepsilon$ /ahol $|y(x_i) - y_i| < \varepsilon$ /, akkor $hH + |y_{r-1}| < \frac{1}{2} + hH$. s igy sehol sem lép fel tulcsordulás.

Rezició elosztás.

A differenciaképző szubrutin megfelelő helyeire beirjuk a megfelelő paramétereket.

Itt $m = 6$, $\ell = 2$.

Konstansok:

/o5oo/= $\frac{1}{2}$				
/o5o1/= $\frac{5}{12}$				
/o5o2/= $\frac{3}{8}$				
/o5o3/= $\frac{251}{720}$				
/o5o4/= $\frac{95}{288}$				
/o5o5/= $\frac{19087}{60480}$				
/o5o6/= $\frac{1}{12}$				
/o5o7/= $\frac{1}{120}$				
/o510/= $\frac{10}{240}$				
/o511/= $\frac{3}{40096}$				
/o512/= $\frac{863}{12096}$				
/o513/= $\frac{1}{2}$				
/o514/= πc		o5	o152	o526
/o515/= πc	o5	o5	oo27	o2o3
/o516/= x_1		13	o5oo	o153
/o517/=		oo	ooo5	oooo
/o52o/=		oo	ooo6	oool
/o521/=		o2	o2oo	o612
/o522/ = πy		24	o564	----

Munkapoziciók:

o525
o526
o527
o53o
o531

Paraméterek

/o524/= b-h

o550	Πτ	o5	o522	o27o
o551	Πτ	o5	o522	o321
o552	:,	12	ooo5	oo22
o553	Πγ	24	o554	o531
o554	↓+	2o	o514	o566
o555	:,	12	o513	o531
o556	↓+	2o	o515	o561
o557	+,	10	o516	oo22
o56o	Πγ	24	o561	o527
o561	(			)
o562	−,	11	ooo1	oo22
o563	Πγ	24	o223	o53o
o564	Πτ	o5	o527	o567
o565	Πτ	o5	o53o	o525
o566	(			)
o567	(			)
o57o	↓+	2o	o526	o526
o571	+	oo	ooo3	o567
o572	+	o1	ooo1	o525
o573	YΠ	34	o574	o567
o574	+	oo	o526	o2o2
o575	+	oo	o52o	o527
o576	+	oo	o517	o573
o577	−	o1	ooo1	o53o
o6oo	Πγ	74	----	o564
o6o1	×,	13	oo17	o526
o6o2	↓−	21	o2o3	o526
o6o3	Πτ	o5	o2o1	o2o3
o6o4	:,	12	o513	o2o1
o6o5	↓+	2o	o526	o2o1
o6o6	−	o1	o52o	o527
o6o7	−	o1	o517	o573
o61o	Πτ	o5	o521	β.
o611	Πγ	24	β'	
o612	+	oo.	ooo1	o53o
o613	−,	11	o2oo	o524
o614	YΠ	34	megáll	0273

Másodrendü közönséges differenciálegyenlet megoldása Adams extrapolációs módszerével.

Legyen adva azz $y''=f/x,y,y'/$ differenciálegyenlet az $y_0 =$ $y/x_0/$, $y'/x_0/=y'_0$ kezdeti feltétellel az $a \leq x \leq 6$ intevallumban . Ennek közelitő megoldását az x_{r+1} pontban

1./ $y_{r+1} = y_r + h y'_r + h^2 \left(\frac{1}{2} f_r + \frac{1}{6} \nabla f_r + \frac{1}{8} \nabla^2 f_r + \frac{19}{180} \nabla^3 f_r + \right.$
$\left. + \frac{3}{32} \nabla^4 f_r \right)$

2./ $y'_{r+1} = y'_r + h [f_r + \frac{1}{2} \nabla f_r + \frac{5}{12} \nabla^2 f_r + \frac{3}{8} \nabla^3 f_r + \frac{251}{720} \nabla^4 f_r)$

képletek segitségével számitjuk ki, ahol $f_r = f/x_r, y_r, y'_r/$
/Lásd Collatz: i.m. 500 old./

Közbülső eredmények vizsgálata.

A feltevés szerint: $|y'| < K_0$, $|y| < K$, $|y''| < 1$, $|x| < 1$

Minthogy igy $|\nabla^m h f_m| < h 2^m$

ezért

$$|h (\tfrac{1}{2} h f_r + \tfrac{1}{6} \nabla h f_r + \tfrac{1}{8} \nabla^2 h f_r + \tfrac{19}{180} \nabla^3 h f_r + \tfrac{3}{32} \nabla^4 h f_r)| <$$
$$< h (\tfrac{1}{2} h + \tfrac{1}{6} 2h + \tfrac{1}{8} h 2^2 + \tfrac{19}{180} h 2^3 + \tfrac{3}{32} h 2^4) < 5h^2$$

De $|h y'_r| < 1$

Igy ha $|y| < k_1 = 1 - \varepsilon$ /ahol $|y(x_r) - y_r| < \varepsilon$) és $h + 5h^2 < 1$, akkor 1) ben nem lép fel tulcsordulás.

2./-ben viszont

$$|h f_r + \tfrac{1}{2} \nabla f_r + \quad + \tfrac{251}{720} \nabla^4 f_r| < h$$

Ha $|y'| < K_0 = 1 - \varepsilon'$ $(|y'(x_r) - y'_r| < \varepsilon')$ és 15h 1, akkor 2./-ben sem lép fel tulcsordulás.

Pozicióelosztás

A differenciaképző szubrutin paraméterhelyeire beirjuk a megfelelő paraméterértékeket.

Itt:

$m = 4$

$\ell = 2$

Konstansok

/0500/= $\frac{1}{2}$
/0501/= $\frac{1}{6}$
/0502/= $\frac{1}{8}$
/0503/= $\frac{19}{180}$
/0504/= $\frac{3}{32}$
/0505/= $\frac{5}{12}$
/0506/= $\frac{3}{8}$
/0507/= $\frac{251}{720}$

/0510/=	y_j,	24	0530	—
/0511/=	x,	13	0162	0504
/0512/=		02	0557	0200
/0513/=		00	0005	0005

Paraméterek

/0514/=b-h

Munkapoziciók:

515
516

Program

0525	Πr	05	0510	0270
0526	Πr	05	0510	0321
0527	Πy	24	0223	----
0530	Πr	05	0000	0515
0531	×,	13	0156	0500
0532	↓+	20	0515	0515
0533	+	00	0003	0531
0534	−,	11	0531	0511
0535	YΠ	34	0536	0531
0536	×	03	0017	0515
0537	×,	13	0017	0202
0540	↓+	20	0515	0515
0541	↓+	20	0201	0201
0542	Πr	05	0000	0515
0543	×,	13	0157	0500
0544	↓+	20	0156	0515
0545	×,	13	0160	0505
0546	↓+	20	0515	0515
0547	×,	13	0161	0506
0550	↓+	20	0515	0515
0551	×,	13	0162	0507
0552	↓+,	30	0515	----
0553	↓+	20	0202	0202
0554	Πr	05	0512	β
0555	Πy	24	β'	----
0556	−	01	0513	0531
0557	−,	11	0200	0514
0560	YΠ.	34	0561	0273
0561		..	....	....

Közönséges elsőrendű differenciálegyenlet megoldása Milne módszerével.

Legyen adva az $y' = f(x,y)$; $y(x_0) = y_0$ differenciálegyenlet. Ennek numerikus integrálása Milne módszerrel a következő módon történik.

Az y_{n-3}; y_{n-2}; y_{n-1}, y_n segitségével az

1./ $y_{n+1}^{(1)} = y_{n-3} + h\left(\frac{8}{3}f_n - \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{8}{3}f_{n-2}\right)$ képlet alapján kiszámitjuk y_{n+1} első közelitését.

Ezzel az első közelitéssel kiszámitjuk f_{n+1} -et s y_{n+1} második, harmadik stb. ν -edik közelitését az

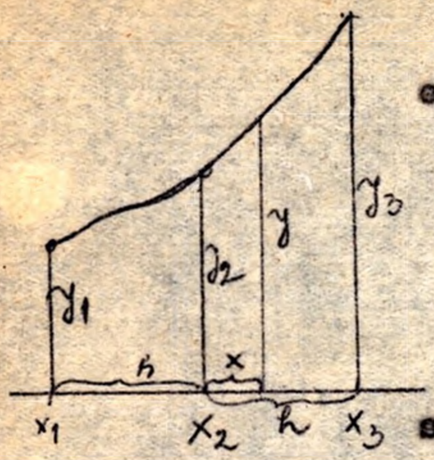
2./ $y_{n+1}^{(\nu)} = y_{n-1} + h\left(\frac{1}{3}f_{n+1}^{(\nu-1)} + \frac{4}{3}f_n + \frac{1}{3}f_{n-1}\right)$ képlettel

számitjuk ki. A 2-es iteráló eljárást addig folytatjuk amig : $y_{n+1}^{(\nu)} = y_{n+1}^{(\nu-1)}$ /Lásd: Békéssy András: "Közönséges differenciálegyenletek numerikus integrálása" c. jegyzet 27-28 old./

A 2/-es iteráló eljáráshoz megadunk egy i lépésszámot, s ha az iterációt ennél többször kellene végrehajtani ahhoz, hogy ~~legyen~~ $y_{n+1}^{(\nu)} = y_{n+1}^{\nu-1}$ legyen, akkor a lépésközt felezzük, s ezzel az uj lépésközzel számolunk tovább. Az uj osztópontokhoz tartozó függvényértékeket kvadratikus interpolációval határozzuk meg.

A kvadratikus interpoláció képlete /lásd: Hajós György "Numerikus és grafikus módszerek" c. jegyzete/ az ábrán látható jelölésekkel:

$$y = y_2 + \frac{x}{2h}\left[(y_2 - y_1)\left(1 - \frac{x}{h}\right) + (y_3 - y_2)\left(1 + \frac{x}{h}\right)\right]$$



esetünkben: $x = \frac{h}{2}$.

s igy a:

$$y = 3\left(\frac{y_2}{4} + \frac{y_3}{8}\right) - \frac{y_1}{8}$$

képlethez jutunk.

Milne módszer fixpontos programja.

Az adott képleteket a következő alakba irjuk át.

1) $y_{n+1}^{(1)} = y_{n-3} + (8\frac{h}{3}f_n - 4\frac{h}{3}f_{n-1} + \frac{h}{3}f_{n-2})$

2) $y_{n+1}^{(\nu)} = \frac{h}{3}f_{n+1}^{(\nu-1)} + [y_{n-1} + (4\frac{h}{3}f_n + \frac{h}{3}f_{n-1})]$

A közbülső eredmények vizsgálata.

A feltevés szerint $|y| \le K_0 < 1 \quad |y'| < 1 \quad |x| < 1$

Így: $|\frac{h}{3}f_n| < \frac{h}{3}$

Így s $|8\frac{h}{3}f_n + 4\frac{h}{3}f_{n-1} + 8\frac{h}{3}f_{n-2}| \le$

$8\frac{h}{3} + 4\frac{h}{3} + 8\frac{h}{3} = \frac{20h}{3} < 7h.$

Igy az 1)-es képletben

$|y_{n+1}^{(1)}| \le |y_{n-1}| + 7h < 1$ ha $|y_{n-3}| < 1 - 7h$

A 2)-es képletben

$|y_{n+1}^{(\nu)}| \le |\frac{h}{3}f_n^{\nu-1}| + |y_{n-1}| + 5\frac{h}{3} < 6\frac{h}{3} + |y_{n-1}|$

Ha tehát $|y_i| < 1 - 7h$ akkor a közbülső eredmények sem csordulnak tul.

Tehát $K_0 = 1 - 7h - \varepsilon$-t véve biztositjuk a tulcsordulás elkerülését.

Pozicióelosztás.

Legyen az $f(x,y)$ -t kiszámitó szubrutin az α-tól $\alpha+k-1$-ig terjedő poziciókban elhelyezve, s $(\alpha+k) = \Pi y - 0021$ legyen.
Legyen ebben a szubrutinban

x helye 0070
y helye 0071
f/x,y/ " 0072
s /0073/= 74 $\Pi y - \alpha$.

Konstansok.

/oool/= 1/3
/ooo2/= oo oool oooo
/ooo3/= oo oooo oool
/ooo4/= $\bar{\gamma}$ 24 o114 oo44
/ooo5/= 1/8
/ooo6/= 1/4
/ooo7/= -1/4
/oolo/= $\bar{\bar{\gamma}}$ 74 – o112
/ooll/= $\bar{\bar{\gamma}}$ 74 – o136
/oo12/= $\bar{\bar{\tau}}$ o5 oo62 oo71
/oo13/= o2 oo7o o153
/oo14/= 1/2
/oo15/= -1/3
/oo16/= $\bar{\bar{\gamma}}$ 24 o114 oo41

Paraméterek.

/oo3o/= y_o
/oo31/= y_1
/oo32/= y_2
/oo33/= y_3
/oo34/= x_o
/oo35/= h
/oo36/= i /az iterációs lépések maximális száma/
/oo37/= $b \cdot 2^{-31}$
/oo73/= 74 $\bar{\bar{\gamma}}$ – α

Munkapoziciók.

/oo41/ oo42, oo43, oo6o, oo61, oo62, oo63, oo64, oo65, oo66, oo67, oo7o, oo71, oo72, oo73, oo2o, oo21,

Program

0075	Пz	05	0035	0020
0076	Пτ	05	0013	0
0077	×,	13	0020	0001
0100	Пy	24	0101	0065
0101	Пτ	05	0030	0061
0102	Пτ	05	0031	0062
0103	Пτ	05	0032	0063
0104	Пτ	05	0033	0064
0105	Пτ	05	0034	0070
0106	Пτ	05	0010	0021
0107	Пτ	05	0062	0071
0110	~~Пτ~~	00	0020	0070
0111	Пy	74	—	0073
0112	×,	13	0065	0072
0113	Пy	24	0114	0041
0114	+	00	0002	0107
0115	+	00	0003	0113
0116	↓|−|,	71	0004	
0117	√П.	34	0107	0120
0120	Пτ	05	0011	0021
0121	Пτ	05	0036	0067
0122	:,	12	0005	0041
0123	Пy	24	0124	0066
0124	:,	12	0005	0043
0125	↓+	20	0066	0066
0126	:,	12	0007	0042
0127	↓+,	30	0066	
0130	↓+.	20	0061	0071
0131	:,	12	0006	0043
0132	↓+,	30	0042	
0133	↓+	20	0063	0066
0134	+	00	0020	0070
0135	Пy	74	—	0073
0136	×	03	0065	0072
0137	↓+	20	0066	0060
0140	↓−,	31	0071	
0141	↓|−|,	71	0003	
0142	√П.	34	0143	0155
0143	Пτ	05	0042	0041
0144	Пτ.	05	0043	0042

0145	Пz	05	0072	0043
0146	Пz	05	0062	0061
0147	Пz	05	0063	0062
0150	Пz	05	0064	0063
0151	Пz	05	0060	0064
0152	Пy	74	—	β'
0153	−,	11	0070	0037
0154	УП	34	megáll	0121
0155	Пz	05	0060	0071
0156	−	01	0003	0067
0157	УП	34	0160	0135
0160	:,	12	0015	0020
0161	↓+	20	0070	0070
0162	×	03	0005	0061
0163	×	03	0006	0062
0164	×,	13	0005	0063
0165	↓+,	30	0062	
0166	↓:,	32	0001	
0167	↓−	21	0061	0061
0170	×,	03	0014	0062
0171	Пy	24	0172	0060
0172	Пz	05	0063	0062
0173	↓×,	33	0006	0063
0174	×,	13	0064	0005
0175	↓+,	30	0063	
0176	↓:,	32	0001	
0177	↓−	21	0060	0063
0200	×	03	0014	0020
0201	×	03	0014	0065
0202	Пz	05	0012	0107
0203	Пz	05	0016	0113

Milne módszer lebegőpontos programja.

Irjük át az 1); 2); képletet

$$y^{(1)}_{n+1} = y_{n-3} + \frac{h}{3}\left(2^3 f_n - 2^2 f_{n-1} + 2^3 f_{n-2}\right)$$

$$y^{(\nu)}_{n+1} = \frac{h}{3} f^{(\nu-1)}_{n+1} + \left[y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(2^2 f_n + f_{n-1}\right)\right]$$ alakba

Pozicióelosztás.

Legyen az $f(x,y)$ -t kiszámitó lebegőpontos szubrutin az α -tól $\alpha+k-1$ -ig terjedő poziciókban s $(\alpha+l) = \mathrm{II}\,y\ 24$ oo75 legyen.

Legyen ebben a szubrutinban:

/o1oo/ = x = /o1o1/

/o1o2/ = y = /o1o3/

(P) = f_n = (P+1)

/o34o/ = 74 IIy —— α

A lebegőpontos müveleteket lebegőpontos szubrutin végzi el mindenegyes lebegőpontos müveletnél erre ugrunk át.

Konstansok

/ooo1/=	oo	oooo	ooo1
/ooo2/=	oo	oooo	ooo2
/ooo3/=	oo	oooo	ooo3
/ooo4/=	oo	oooo	ooo4
/ooo5/=	oo	ooo4	ooo1
/ooo6/=	oo	ooo6	ooo6
/ooo7/=	oo	ooo2	oooo
/oo1o/=	oo	ooo6	oooo
/oo11/=	oo	oooo	ooo6

/oo12/= 3 = /oo13/
/oo14/= Πz 05 P+1 oo6o
/oo15/= Πy 74 — o143
/oo16/= Πy 74 — o155
/oo17/= Πy 74 — o2o1
/oo2o/= Πy 74 — o214
/oo21/= Πy — o274
/oo22/= Πz 05 oo72 oo7o
/oo23/= Πz 05 oo62 oo6o
/oo24/= Πy 74 — o333
/oo25/ = Πy 74 — o311
/oo26/= Πz 05 oo32 oo62
/oo27/= Πz 05 oo42 oo72
/oo3o/= Πy 74 o12o
/oo31/= o2 oo7o o257

Paraméterek:

/oo32= y_0 = (oo33)
/oo34/= y_1 = (oo35)
/oo36/= y_2 = (oo37)
/oo4o/= y_3 = (oo41)
/oo42/= h = (oo43)
/oo44/= $h/3$ = (oo45)
/oo46/= b = (oo47)
/oo5o/= x_0 = (oo51)
/oo76/= ε
/oo77/= i /iterációszám/
/o34o/= 74 Πy — α

Munkapoziciók:

/oo52/= f_{n-2} = (oo53)
/oo54/= f_{n-1} = (oo55)
/oo56/= f_n = (oo57)
/oo6o/= $\tilde{f}_{n+1}$ = (oo61)
/oo62/= y_{n-3} = (oo63)
/oo64/= y_{n-2} = (oo65)
/oo66/= y_{n-1} = (oo67)
/oo7o/= y_n = (oo71)
oo72
oo73
oo74
oo75

Program

0104	Пz	05	0050	0100
0105	Пz	05	0051	0101
0106	Пz	05	0031	
0107	Пz.	05	0032	B 0062
0110	+	00	0005	0107
0111	Ц-1,	71	0027	
0112	уП.	34	0107	0113
0113	Пz	05	0026	0107
0114	Пz	05	0030	0075
0115	Пz	05	0065	0103
0116	Пz	05	0064	0102
0117	Пy	74	—	0135
0120	Пz	05	P	0052
0121	Пz	05	P+1	0053
0122	+	00	0007	0115
0123	+	00	0007	0116
0124	+	00	0002	0120
0125	+	00	0002	0121
0126	Ц-1,	71	0014	
0127	уП.	34	0115	0130
0130	—	01	0010	0115
0131	—	01	0010	0116
0132	—	01	0011	0120
0133	—	01	0011	0121
0134	Пy	74	—	0146
0135	Пz	05	0015	v+l.
0136	Пz	05	0101	P+1
0137	Пz	05	0100	P
0140	Пz	05	0043	Q+1
0141	Пz	05	0042	Q.
0142	Пy	74	—	u.
0143	Пz	05	P	0100
0144	Пz.	05	P+1	0101
0145	Пy	74	—	0340
0146	Пz	05	0020	0075
0147	Пz	05	0077	0072
0150	+	00	0003	P+1
0151	Пz	05	0052	Q
0152	Пz.	05	0016	v+l.

0153	+,	10	0003	0053	
0154	Пу	24	и	Q+1	
0155	Пс	05	0054	Q	
0156	+	00	0004	V+l	
0157	+,	10	0002	0055	
0160	Пу	24	и	Q+1	
0161	+	00	0045	P+1	
0162	×	03	0044	P	
0163	+	00	0004	V+l	
0164	Пу	74	—	V	
0165	Пс	05	0062	Q	
0166	Пс	05	0063	Q+1	
0167	+	00	0004	V+l	
0170	Пу	74	—	и	
0171	Пс	05	P	0102	$y^{(1)}_{n+1}$
0172	Пс	05	P+1	0103	
0173	Пс	05	0054	P	
0174	Пс	05	0055	P+1	
0175	Пс	05	0056	Q	
0176	Пс	05	0017	V+l	
0177	+,	10	0002	0057	
0200	Пу	24	и	Q+1	
0201	+	00	0045	P+1	
0202	×	03	0044	P	
0203	+	00	0004	V+l	
0204	Пу	74	—	V	
0205	Пс	05	0066	Q	
0206	Пс	05	0067	Q+1	
0207	+	00	0004	V+l	
0210	Пу	74	—	и	
0211	Пс	05	P	0074	$[y_{n-1} + \frac{h}{3}(4f_n + f_{n-1})]$
0212	Пс	05	P+1	0073	
0213	Пу	74		0136	
0214	Пс	05	P	0060	
0215	Пс	05	P+1	0061	
0216	+	00	0045	P+1	
0217	×	03	0044	P	
0220	+,	10	0011	0020	
0221	Пу	24	V	V+l	
0222	Пс	05	0074	Q	

0223	Пс	05	0073	Q+1
0224	+	00	0004	v+l
0225	Пу	74	—	v+l
0226	−,	11	P+1	0103
0227	Ш-1,	71	0001	
0230	УП	34	0231	0234
0231	−,	11	P	0102
0232	Ш-1,	71	0001	
0233	УП	34	0240	0234
0234	Пс	05	P	0102
0235	Пс	05	P+1	0103
0236	—	01	0001	0072
0237	УП	34	0265	0340
0240	Пс	05	0064	0062
0241	+	00	0005	0240
0242	Ш-1,	71	0022	
0243	УП	34	0240	0244
0244	Пс	05	P	0070
0245	Пс	05	P+1	0071
0246	—	01	0006	0240
0247	Пс	05	0054	0052
0250	+	00	0005	0247
0251	Ш-1,	71	0023	
0252	УП	34	0247	0253
0253	—	01	0006	0247
0254	Пс	05	0056.	P
0255	Пс	05	0057	P+1
0256	Пу	74	—	B'
0257	−,	10	0101	0047
0260	Ш-1,	71	0001	
0261	УП	34	0262	0147
0262	−,	11	0046	0100
0263	Ш-1,	71	0001	
0264	УП	34	megáll	0147
0265	Пс	05	0064	P
0266	Пс	05	0066	Q
0267	−,	11	0002	0065
0270	Пу	24	0271	P+1
0271	Пс	05	0021	v+l
0272	−,	10	0003	0067
0273	Пу	24	u	Q+1

0274	×	03	0012	p
0275	+	00	0013	p+1.
0276	+	00	0004	v+l
0277	Пу	74	—	v
0300	Пс	05	0062	Q.
0301	+	00	0004	v+l.
0302	−,	10	0003	0063
0303	Пу	24	q	Q+1
0304	Пс	05	p	0062
0305	Пс	05	p+1.	0063
0306	Пс	05	0066	p
0307	Пс	05	0070	Q.
0310	−,	10	0002	0067
0311	Пу	24	0312	p+1.
0312	Пс	05	0344	v+l.
0313	−,	10	0003	0071
0314	Пу	24	u	Q+1.
0315	Пс	05	0064	Q.
0316	Пс	05	0066	0064
0317	−,	10	0003	0065
0320	Пу	24	0274	Q+1.
0321	+	00	0002	v+l.
0322	Пу	74	—	q.
0323	Пс	05	0067	0065
0324	Пс	05	p	0066
0325	Пс	05	p+1	0067
0326	−,	10	0042	0000
0327	Пу	24	0330	p
0330	Пс	05	0024	v+l.
0331	+,	10	0013	0043
0332	Пу	24	v	p+1
0333	Пс	05	0100	Q.
0334	Пс	05	0101	Q+1
0335	+	00	0004	v+l
0336	Пу	74	—	u
0337	Пс	05	p	0100
0340	Пс	05	p+1	0101
0341	−	01	0001	0043
0342	−	01	0001	0045
0343	Пу	74	—	0114
0344	Пу.	74	—	0315

II. P A R C I Á L I S D I F F E R E N C I Á L - E G Y E N L E T E K.

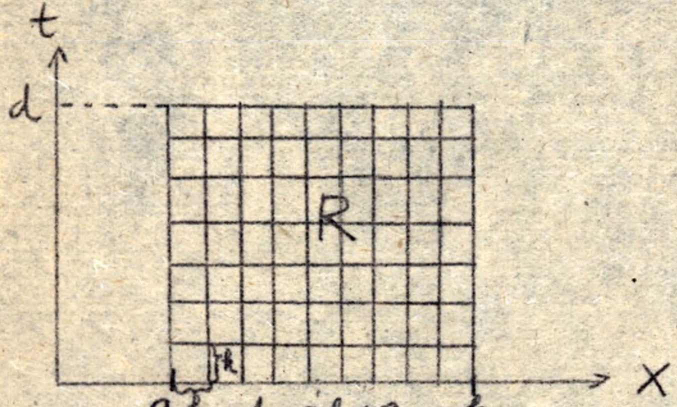
A parciális differenciálegyenletek közül két tipus numerikus integrálási módszerét programozzuk be adott kezdeti, illetőleg peremfeltétel mellett; éspedig: a

1./ $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ hiperbólikus differenciálegyenletet /fixpontos program/:

2./ A Laplace egyenletet /lebegőpontos program./ oldjuk meg.

Az $u_{tt}=a^2u_{xx}$ hiperbolikus differenciálegyenlet numerikus integrálása.

Keressük az 1) ábrán látható R $(a\le x\le b;\ 0\le t\le d)$ tartományon az $u_{tt}=a^2u_{xx}$ differenciálegyenlet numerikus megoldását a tartomány bizonyos pontjaiban, ha a következő perem és kezdő feltételek adottak:



1. ábra

$$u(t,a)=\alpha(t)$$
$$u(t,b)=\beta(t)$$
$$u(0,x)=\varphi(x)$$
$$u'(0,x)=\psi(x)$$

Osszuk fel a tartományt h, illetve k, oldalu derékszögü négyszögekkel /legyen az (a,b) osztópontjainak száma n végpontokkal együtt/ s/ jelöljük az u megoldás közelitő értékét a P $(x=a+ih;\ y=jk)$ pontban u_{ij} -el. A másodrendü differenciálhányadosokat a megfelelő differenciálhányadosokkal helyettesitve: ax $u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}=\frac{k^2a^2}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j})$ egyenlőséghez jutunk.

Legyen $h=ka$, igy
$$u_{i,j+1}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-u_{i,j-1} \qquad (1,1) \qquad (j>1)$$
Az első sor /j=1/ pontjaihoz tartozó közelitő értéket a következő módon nyerjük.

Ezekre a pontokra egyrészt:

1) $u_{i1}=u_{i+1,0}+u_{i-1,0}-u_{i,-1}$

képlet érvényes /1, 1/-nek megfelelően/

Másrészt:

2) $\psi(x_i)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(0,x_i)}\approx\frac{u_{i,1}-u_{i,-1}}{2h}$ lévén

1/-ből és 2/-ből $u_{i,-1}$ -et kiküszöbölve

$$(1,2) \qquad u_{i1}=\frac{u_{i+1,0}+u_{i-1,0}}{2}+h\psi_i \qquad (i=2,\dots n-1)$$
képlethez jutunk.

A programozást /1,1/ ill. /1,2/ alapján végezzük.

Mivel a gép fixponttal működik, ezért ügyelni kell arra, hogy a szereplő mennyiségek 1-nél abszolut értékben kisebbek legyenek.

Tegyük fel, hogy $|x| < 1$; $|t| < 1$ s legyen $h \leq$ o,1 / Ez $|x| < 1$ miatt nem jelent lényeges megszoritást./

$$|\beta(t)| < \frac{1}{3}$$

$$|\varphi(x)| < \frac{1}{3}$$

$$|\psi(x)| < \frac{1}{3}$$

Igy az első sor pontjaiba vett /j=1/ közelitőértékekre

$$|u_{i,1}| \leq \left|\frac{u_{i+1,0}}{2}\right| + \left|\frac{u_{i-1,0}}{2}\right| + |h\,\psi_i| =$$

$$= \left|\frac{\varphi_{i+1,0}}{2}\right| + \left|\frac{\varphi_{i-1,0}}{2}\right| + |h\,\psi_i| \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{h}{3} < 1$$

Minthogy a következő sorokra

$$|u_{i,j+1}| \leq |u_{i+1,j}| + |u_{i-1,j}| + |u_{i,j-1}|$$

ezért a következő módon járunk el.

Ha az j-edik sort kiszámitjuk, megvizsgáljuk hogy $|u_{i,j}| < \frac{1}{3}$ teljesül-e. $(i = 1, 2, \ldots n)$ .Ha nem teljesül akkor a szóbanforgó és az előtte lévő / j- 1-ik/ sort 3-el szorozzuk, s kinyomtatáskor jelezzük / o,9999999 kinyomtatásával/ hogy az ezután következő megoldásértékek 3-el szorzandók.

Pozicióelosztás.

Legyen az $\frac{1}{2}\varphi(x)$ és $-h\,\psi(x)$ -et kiszámitó program / a kettőt összekapcsoljuk, miután $\frac{1}{2}\varphi(x)$ -et kiszámitottuk közvetlenül rátérünk $-h\,\psi(x)$ kiszámitására, s a vezérlést ezután adjuk át a vezérszubrutinnak./ az ε-tól $\varepsilon + k - 1$ -ig terjedő poziciókban elhelyezve.

s $(\varepsilon + k)$ = 74 Π_y — oo53

(oo5o) = x legyen

Az eredmény poziciói

(oo51) = $\frac{1}{2}\varphi(x)$

(oo52) = $-h\,\psi(x)$

Legyen az $\alpha(t)$, $\beta(t)$ -t kiszámitó program / ugyanugy mint az előző esetben a két programot összekapcsoljuk./ Az η -tól $\eta+k_1-1$ -ig terjedő poziciókban, elhelyezve,s

$(\eta+k_1)$ = 74 ∥y — 0053

(0050) = t legyen

Az eredmény poziciói itt is

(0051)= $\alpha(t)$

(0052)= $\beta(t)$

Konstansok.

/0001/= ∥y 74 — 0151
/0002/= 00 0000 0001
/0003/= 2^{-12}
/0004/= + 0250 0250
/0005/= 00 0001 0001
/0006/= ∥y 74 0205
/0007/= ∥z 05 0051 0250
/0010/= 00 0001 0000
/0011/= +, 10 0000 0002
/0012/= ↓- 21 0001 0001
/0013/= ⊢, 00 7777 0000
/0014/= ⊢, 71 0000 0015
/0015/= 1/3
/0016/= $1/3-2^{-30}$
/0017/= 00 7777 0216
/0020/= x 03 0015 0250
/0021/= 01 0247 0161
/0022/= 00 0002 0002
/0023/= + 9999999

Paraméterek.

/0025/= a
/0026/= $b+2^{-30}$
/0027/= h
/0030/= $\frac{h}{a}$
/0031/= 00 0000 000n
/0032/= d

Munkapoziciók

0250 - 0750
0055 - 0073

Program

o126	:,	12	ooo3	oo31	
o127	Пγ	24	o13o	oo64	→ oo n oooo
o13o	↓+	2o	oo31	oo65	→ oo n n
o131	↓−	21	oo22	oo66	→ oon-2 n-2
o132	+,	1o	oo31	oo31	
o133	Пγ	24	o134	oo73	→ oo oooo 2n
o134	↓+	2o	oo2o	oo62	→ oo15 o25o+2n
o135	Пτ	o5	oo31	oo71	→ oo oooo n
o136	↓+	2o	oo1o	oo7o	→ oo ooo1 ooon
o137	↓−	21	ooo2	oo67	→ oo ooo1 ooon-1
o14o	Пτ	o5	oooo	oo5o	
o141	Пτ	o5	ooo7	o151	
o142	Пγ	24	o143	o2o7	
o143	↓+	2o	oo7o	o152	
o144	Пτ	o5	ooo4	oo55	→ ooo25o o25o
o145	↓+	2o	oo65	oo56	→ oo o25o+n o25o +n
o146	Пτ	o5	oo25	oo5o	
o147	Пτ	o5	ooo1	oo53	
o15o	Пγ	74	−	ε	
o151					
o152					
o153	+	oo	ooo2	o151	
o154	+	oo	ooo2	o152	
o155	+	oo	oo27	oo5o	
o156	−,	11	oo5o	oo26	
o157	УП	34	o16o	o15o	
o16o	Пτ	o5	oo21		
o161	+	oo	oo1o		
o162	−	o1	ooo2	oo73	
o163	УП	34	o164		
o164	+,	1o	oo11	oo55	
o165	Пγ	24	o166	o171	
o166	+,	1o	oo12	oo56	
o167	Пγ	24	o17o	o172	
o17o	↓+	2o	oo66	oo57	
o171					
o172					
o173	+	oo	ooo5	o171	

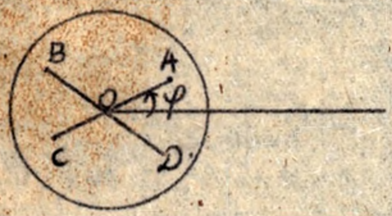
0174	+	00	0005	0172
0175	↓|-|,	71	0057	
0176	УП·	34	0171	0177
0177	Пτ	05	0055	0060
0200	Пτ	05	0056	0055
0201	Пτ	05	0060	0056
0202	+	00	0030	0050
0203	Пτ	05	0006	0053
0204	Пу	74		3
0205	+	00	0071	0207
0206	↓+·	20	0067	0210
0207	(	..	....	....)
0210	(	..	....	....)
0211	−,	11	0071	0000
0212	Пу	24	0213	0071
0213	Δ,	16	0013	0055
0214	↓+	20	0017	
0215	Пτ	05	0031	0072
0216	+	00	0010	
0217	—	01	0002	0072
0220	УП·	34	0221	
0221	Δ,	16	0013	0055
0222	↓+	20	0014	0224
0223	↓+	20	0064	0061
0224	(	..	....	....)
0225	УП·	34	0231	0226
0226	+	00	0010	0224
0227	↓|-|,	71	0061	
0230	УП·	34	0224	0237
0231	Пτ	05	0020	0232
0232	(	...	....	....)
0233	+	00	0002	0232
0234	↓|-|,	71	0062	
0235	УП·	34	0232	0236
0236	ПτП	55	0023	0023
0237	|-|,	51	0032	0050
0240	УП·	34	0164	megáll

Laplace egyenlet.

A Laplace egyenlettel kapcsolatban a Dirichlet feladatot programozzuk be. A felhasznált numerikus módszer a Laplace operátornak bizonyos - numerikus számitásra alkalmas operátorokkal való helyetesitése utján keletkezik.

Ismeretes, hogy a $\Delta u = 0$ Laplace egyenlet u/ x,y / megoldása valós része az $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ analitikus komplex függvénynek, ahol $z = x + iy$. Legyen tehát $f(z)$ analitikus az 0 pont körüli K körben. Ekkor f/z/ tetszőleges, a kör belsejében lévő A pontban sorba fejthető, és

$$f_A = \sum_{\nu=0} a_\nu (z - z_0)^\nu$$



Polárkoordináták segitségével

$$a_\nu = \varrho_\nu e^{i\Theta_\nu}, \quad z - z_0 = r e^{i\varphi}$$

(1,1)-et

$$f_A = \sum \varrho_\nu r^\nu e^{i(\nu\varphi + \Theta_\nu)}$$

alakba lehet irni.

Hasonló módon felirhatjuk az

$$B\left(r, \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \quad C(r, \varphi + \pi); \quad D\left(r, \varphi + \frac{3\pi}{2}\right)$$

pontokhoz tartozó hatványsort is.

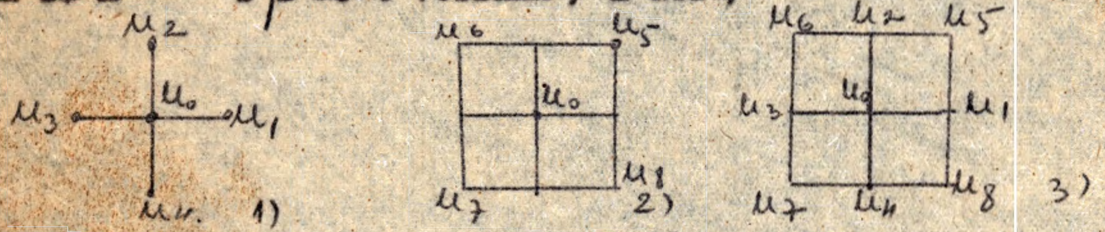
Igy: $f_A + f_B + f_C + f_D - 4f_0 =$

$$= 4\left(\varrho_4 r^4 e^{i(4\varphi + \Theta_4)} + \varrho_8 r^8 e^{i(8\varphi + \Theta_8)} + \varrho_{12} r^{12} e^{i(12\varphi + \Theta_{12})} + \dots\right)$$

Minthogy $u(r,\varphi)$ valós része f /z/-nek igy:

$$u_A + u_B + u_C + u_D - 4u_0 = 4\left[\varrho_4 r^4 \cos(4\varphi + \Theta_4) + \varrho_8 r^8 \cos(8\varphi + \Theta_8) + \varrho_{12} r^{12} \cos(12\varphi + \Theta_{12}) + \dots\right]$$

Ha r = h s φ = o-t veszünk / 1 ábra/



akkor:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0 = 4h^4 \varrho_4 \cos\Theta_4 + 4h^8 \varrho_8 \cos\Theta_8 + 4h^{12} \varrho_{12} \cos\Theta_{12} + \dots$$

Viszont $r = \sqrt{2}h$ $\varphi = \pi/4$ esetén /2 ábra/

$$u_5 + u_6 + u_7 + u_8 - 4u_0 = -16h^4 \varrho_4 \cos\Theta_4 + 64h^8 \varrho_8 \cos\Theta_8 - 256h^{12} \varrho_{12} \cos\Theta_{12} = \dots$$

/1,4/-et 4-el szorozva s /1,5/-tel összeadva

$$4u_1 + 4u_2 + 4u_3 + 4u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 - 20u_0 =$$

$$= 80h^8 \varrho_8 \cos\Theta_8 - 240h^{12} \varrho_{12} \cos\Theta_{12} + \dots$$

/Az ennek megfelelő pontok a 3 ábrán láthatók./

$$H = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \qquad 2X = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$K = 4H + 2X = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 1 \\ \hline 4 & -20 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 1 \\ \hline\end{array}$$

sablonok által meghatározott operátorok(elrendezés mátrix)segitségével az /1,4/,/1,5/, /1,6/ baloldala Hu, 2xu Ku alakban irható.

Ha h elég kicsi / a pontossági követelményektől függően/ akkor a jobboldalak elhanyagolhatók, s igy a $\hat{A}$ operátort pontonként a H, X,K. operátorral helyettesitve

$$H\,u = 0 \quad /1,6/$$
$$X\,u = 0 \quad /1,7/$$
$$K\,u = 0 \quad /1,8/$$ egyenletekhez jutunk.

/ A szóbanforgó pontcsoportot az adott sablonok./elrendezés-mátrix / határozzák meg./

Az 1 / és 3/ ábrán lévő pontokra: /1,6/ /1.7/ és / 1,8/ kiirva:

$$u_0 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$$

$$u_0 = \frac{1}{4}(u_5 + u_6 + u_7 + u_8)$$

$$u_0 = \frac{4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8)}{20}$$

képletekhez jutunk.

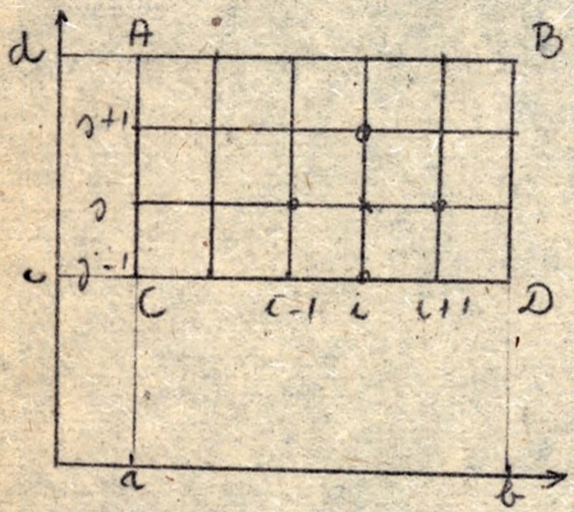
A Dirichlet féle feladat numerikus megoldása a sikon.

Mint ismeretes a Dirichlet féle feladat a következő: Keresendő a sik egy adott R tartományában harmonikus u/x,y/ függvény, amely a tartomány határán adott; azaz amelyre:

$$\Delta u=0 \quad s \quad u/_R = \varphi(x,y).$$

A feladatot az előbb /vázlatosan/ levezetett rácspont módszerrel oldjuk meg, s feltesszük, hogy a tartomány téglalap /$a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$/.

Osszuk fel a tartományt egymástól h távolságra haladó, s az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel az ábrán látható módon.



Legyen az AB oldalon lévő osztópontok száma k/ végpontokat is beleértve/ a BD oldalon lévőké pedig ℓ /a végpontokat nem számitva/ Az előbbi meggondolások alapján, pontonként alkalmazhatjuk a Δ operátor helyett a H illetve K operátort.

Azaz pontonként felirhatjuk - u_{ij} -vel jelölve az u megoldás P /a+ih, c+jh/ pontban felvett közelitő értékét az

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i,j+1} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j}\right)$$

illetve:

$$u_{i,j} = \frac{4(u_{i,j+1} + u_{j,i+1} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j})}{20} + \frac{1}{20}\left(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}\right)$$

egyenlőséget.

A megoldás rácspontokban vett közelitő értékeit a következő módon nyerjük.

Minthogy az u_{ij} /$i=1 \ldots k$ $j=0 \ldots \ell$ / értékek csak a határon ismeretesek ezért a H operátort alkalmazva minden /nem határon lévő/ pontra egy $(n-2)\ell$ ismeretlent tartalmazó - s ennyi egyenletből álló

$\underline{\underline{H}}\underline{u}=\underline{b}$ egyenletrendszerhez jutunk.

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai szolgáltatják a feladat megoldásának közelitő értékeit a megfelelő pontokban.

Hu=b egyenletrendszer megoldása:

A $\underline{\underline{H}}$ mátrix a következő - könnyen belátható- speciális tulajdonságokkal rendelkezik. /lásd: Milne: im. 218 old./

1./ $\underline{\underline{H}}$ pozitiv definit;

2./ $\underline{\underline{H}}$ mátrix csak tartománytól függ;

3./ A fődiagonálisban mindenütt 4-es áll, a többi helyen soronként legfeljebb 4-1-es a többi elem 0.

Az egyenletrendszert gradiens módszerrel oldjuk meg. /lásd: Booth "Numerical methods" c. könyve 97 old./

Legyen v_ν az $\underline{u}$ vektor ν-edik közelitése. Akkor a $\nu+1$-edik közelitést a következő lépésekkel határozzuk meg.

$$\underline{r}_0 = \underline{\underline{H}}\,\underline{v}_0 - \underline{b}$$

$$\underline{z}_\nu = \underline{\underline{H}}\,\underline{r}_\nu$$

$$q_\nu = \frac{\underline{r}_\nu \underline{r}_\nu}{\underline{r}_\nu \underline{z}_\nu}\,0{,}9$$

$$\underline{v}_{\nu+1} = \underline{v}_\nu - q_\nu \underline{r}_\nu$$

$$\underline{r}_{\nu+1} = \underline{r}_\nu - q_\nu \underline{z}_\nu$$

Az iterációt addig folytatjuk, mig az r_ν vektor $r_{\nu i}$ kordinátáira

$$|r_{\nu i}| < \varepsilon$$

ahol ε előre adott.

Az információk ábrázolása:

Minthogy az ismeretlenek száma a $\underline{\underline{H}}\underline{u}=\underline{b}$ egyenletrendszerben $(n-2)\ell$ tehát $\underline{\underline{H}}$ mátrix elemeinek száma $(n-2)^2\ell^2$. Ezért -mivel az M-3 gép csak 2048 szóból álló memóriával rendelkezik- következőképpen járunk el.

A $\underline{\underline{H}}$ mátrixot $\underline{\underline{H}} = 4\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{H}}_1$ alakban irjuk fel.

Igy

A $4\underline{\underline{E}}$ mátrix egyetlen elemmel /4/ ábrázolható. A mátrix csak a o, és -1 elemekből áll; a -1 -ek száma soronként legfeljebb 4. A $\underline{\underline{H}}_1$ mátrixot ezért a következő módon ábrázoljuk.

Minden sornak megfeleltetünk egy egy szót. Minden szót öt részre osztunk fel: az első rész 8 bit-ből a következő három rész 7-7 bit-ből, az utolsó rész 1 bit-ből áll.

Legyen a μ -edik sorban:

$O_{\mu 1} \leq 255$ az első egyes előtt álló 0-ák száma

$O_{\mu 2} \leq 127$ az első és második 1-es között álló 0-ák száma

$O_{\mu 3} \leq 127$ a második és harmadik 1-es között álló 0-ák száma

$O_{\mu 4} \leq 127$ a harmadik és negyedik 1-es között álló 0-ák száma.

Igy a következő módon ábrázolunk egy sort:

A megfelelő szó:	első részébe	beirunk	$O_{\mu 1}+1$	-et
	második	"	"	$O_{\mu 2}+1$	-et
	harmadik	"	"	$O_{\mu 3}+1$	-et
	negyedik	"	"	$O_{\mu 4}+1$	-et
	ötödik	"	"	0	-t

Ez az ábrázolás mód lényegesen egyszerüsiti a programot, segitségével a $\underline{\underline{H}}\,\underline{x} = (4\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{H}}_1)\,\underline{x}$ szorzást ugy végezzük el, hogy a $4\underline{\underline{E}}\,\underline{x} = 4\underline{x}$ vektor megfelelő koordinátájából levonjuk a $\underline{x}$ vektor $O_{\mu 1}+1$ -edik $(O_{\mu 1}+O_{\mu 2}+2)$ -edik stb. koordinátáját.

A megoldás finomitása:

A $\underline{\underline{H}}u = b$ egyenletrendszer $\underline{y}$ megoldását ugy finomitjuk, hogy a nyert értékekre mint a $\Delta u = 0$ egyenlet megfelelő pontokban vett megoldásainak közelitéseire pontonként alkalmazzuk a $\underline{\underline{H}}$ operátort. Annyiszor "pásztázzuk" ezen a módon végig az adott tartományt amig a ν -edik és a $\nu+1$ -edik közelitésre nézve:

$$u_{ij}^{(\nu)} = u_{ij}^{(\nu+1)} \quad \left(\begin{matrix} i = 1,2,\dots n \\ j = 1,2,\dots n \end{matrix} \right).$$

Még fontosabb közelitést nyerünk, ha a $\underline{\underline{H}}$ operátor helyett a K operátort alkalmazzuk pontonként, az előbb leirt módon.

A feladat megoldásának menete:

1./ Kiszámitjuk fixpontos programmal a peremfeltételt a megfelelő pontokban és ezeket az értékeket elhelyezzük a memória α -tól $\alpha+k$ -ig terjedő poziciókban.

2./ Ezen értékek segitségével előállitjuk a b vektort levegőpontos alakban.

3./ Megoldjuk a Hu=b egyenletrendszert lebegőpontos program segitségével.

4./ A nyert megoldást a pontossági követelményektől függően a H illetve K operátor segitségével finomitjuk lebegőpontos programmal.

Megjegyzés:

A feladat lebegőponttal való programozása miatt a rácspontok lehetséges száma erősen csökken, a végrehajtási idő is megnő. Azt, hogy a megoldásértékek ne csorduljanak tul, könnyü elérni, minthogy a Laplace egyenlet megoldása a határon veszi fel minimumát ill. maximumát; igy csak a határfeltételt kell ugy transzformálni, hogy abszolut értékben minden érték egynél kisebb legyen, ebből már következik, hogy u/x,y/|<1/ a határfeltételnek - mint kétváltozós függvénynek szélső értékei könnyen meghatározhatók./

Az egyenletrendszer közbülső eredményeinél a azonban nem biztosithatók a tulcsordulás elkerülése, minthogy ezeket nehéz becsülni. Elkészithető azonban egy olyan program is amely az egyenletrendszert lebegőponttal oldja meg, még a H ill. K operátorral való finomitást fixpontos programmal mégpedig ugy, hogy az egyenletrendszer lebegőponttal nyert megoldásai egy közös kitevőre normalizáljuk, természetesen megvizsgálva, hogy ez nem jár-e nagy jegyveszteséggel. / Ezt a jelen dolgozatban nem végezzük el./

P o z i c i ó e l o s z t á s.

Konstansok:

/ooo1/=		oo ooo2 ooo2
/ooo2/=		o1 oooo oooo
/ooo3/=	Δ,	16 22o1 ooo6
/ooo4/=		oo ooo1 ooo1
/ooo5/=		oo ooo1 oooo
/ooo6/=		11111111 oo .... o
/ooo7/=		oooooooo 1111111 o .... o
/oo1o/=		o.... o.... o 1111111o ... o
/oo11/=		0... 0... o11111111 o... o
/oo12/=		oo oooo ooo1
/oo13/= 33	↓x,	oo26
/oo14/= 33	↓x,	oo27
/oo15/=		oo oooo ooo5
/oo16/= o5	Πτ	o11o Q
/oo17/=		oo oooo o122
/oo2o/=		oo oooo ooo2
/oo21/= 74	Πy	— 3361
/oo22/=		oo oooo ooo4
/oo23/= 74	Πy	— 3312
/oo24/= 13	x,	o11o o1o2
/oo25/=	2^{-9}	oo ooo2 oooo
/oo26/=	2^{-9}	
/oo27/=	2^{-2}	
/oo3o/=	2^{-5}	
/oo31/=	2^{-12}	
/oo32/=	—	o1 o111 Q+1
/oo33/= 74	Πy	— 3326
/oo34/= o5	Πτ	o1o6 Q
/oo35/= o5	Πτ	P o11o
/oo36/= 51	|—|,	o11o oo76
/oo37/= 74	Πy	— 35oo
/oo4o/= 13	x,	o11o o11o
/oo41/=		o2 7776 7777
/oo42/= 74	Πy	— 343o
/oo43/= 74	Πy	— 337o
/oo44/=	0,9	
/oo45/=		oo oooo ooo3
/oo46/= o5	Πτ	o5 o11o
/oo47/=	+,	1o oo2o o111
/oo5o/=	YΠ.	34 33o1 3464

Paraméterek.

/oo77/ = oo oooo n

/oo76/ = ε =/oo75/

A H mátrix helye:

22o1 az első sornak megfelelő szó poziciója

22o2 a második " " " "

:

22o1+n-1 az n-edik sornak megfelelő szó poziciója.

Munkapoziciók.

oo56- oo74- ig. oloo,olol, olo2.

A v_ν vektor helye./A számitás kezdetén paraméterként visszük be./

(ollo) = $v_{\nu 1}$ =(olll)

(oll2) = $v_{\nu 2}$ =(oll3)

:

(ollo+2n-2) = $v_{\nu n}$ =(olll+ 2n-2)

Az r_ν helye: $[r_\nu = r_\nu(r_{\nu 1},\ldots r_{\nu n})]$

(ollo+2n) = $r_{\nu 1}$ =(olll+2n)

:

(ollo+4n-2) = $r_{\nu n}$ =(olll+4n-2)

A z_ν helye: $[z_\nu = z_\nu(z_{\nu 1},\ldots z_{\nu n})]$

(ollo+ 4n) = $z_{\nu 1}$ =(olll+4n)

:

(ollo+6n-2) = $z_{\nu n}$ =(olll+6n-2)

A b/ $b_1, b_2, \ldots b_n$/ helye:

/ 2466/ = b_1 =/2467/

:

/2466+2n-2 /= b_n =/2467+2n-2/

A belső rácspontok számát a memóriakapacitás korlátozza. Legyen

n $\leq$ 18o.

Program

3240	−,	11	0012	0077	
3241	Пу	24	3242	0074	→00 0000 000 n 1
3242	:,	12	0031	0077	
3243	Пу	24	3244	0073	→00 n 0000
3244	↓+	20	0073	0072	→00 2n 0000
3245	↓+	20	0072	0071	→00 4n 0000
3246	+,	10	0077	0077	
3247	Пу	24	3250	0067	→00 0000 2n
3250	↓+	20	0072	0055	→00 2n 2n
3251	↓+,	30	0072		
3252	↓+	20	0040	0063	x, 0110+ 4n 0110+2n
3253	+,	10	0035	0067	
3254	Пу	24	3255	0065	→ПсР 0110+2n
3255	↓+	20	0067	0061	→ПсР 0110+4n
3256	+,	10	0003	0073	
3257	Пу	24	3260	0064	Λ, 2201+ n 0006
3260	+,	10	0072	0024	
3261	Пу	24	3262	0062	X, 0110+2n 0102
3262	+,	10	0072	0036	
3263	Пу	24	3264	0057	|−|, 0110+2n 0076
3264	↓+	20	0072	0056	|−|, 0110+4n 0076
3265	+,	10	0032	0072	
3266	Пу	24	3271	0060	− 0110+2n Q+21
3271	Пс	05	0050	3341	
3272	Пс	05	0047	3302	
3273	Пс	05	0046	3301	
3274	Пс	05	0034	0066	
3275	Пс	05	0065	3331	
3276	↓+	20	0004	3332	
3277	Пс	05	0033	V +1	
3300	Пс	05	0003	0070	
3301	(			)	
3302	(			)	
3303	Пу	24	3304	P+1	
3304	Пс	05	0070	3314	
3305	Пс	05	0066	3323	
3306	Пс	05	0013	3320	
3307	Пс	05	0043	3330	
3310	−,	11	3320	0014	
3311	УП	34	3312	3314	

3312	− 01	0002	3320
3313	+ 00	0022	3330
3314	(		)
33155	↓−, 31	0012	—
3316	Уп 34	3331	3317
3317	↓+, 30	0012	
3320	(		)
3321	↓+ 20	3323	3323
3322	↓+ 20	0004	3324
3323	(		)
3324	(		)
3325	Пу 74		v)
3326	+ 00	0012	3314
3327	+ 00	0005	3320
3330	(		)
3331	(		)
3332	(		)
3333	+ 00	0025	3301
3334	+ 00	0020	3302
3335	+ 00	0020	3331
3336	+ 00	0020	3332
3337	+ 00	0005	0070
3340	↓Н, 71	0064	
3341	(		)
3342	− 01	0067	3331
3343	− 01	0067	3332
3344	− 01	0072	3301
3345	− 01	0067	3302
3346	Пс 05	0063	3353
3347	↓− 21	0041	3355
3350	↓+ 20	0055	0100
3351	Пс 05	0000	0101
3352	Пс 05	0000	0102
3353	(		)
3354	Пу 24	3355	P
3355	(		)
3356	Пу 24	3357	P+1
3357	Пс 05	0021	V+Lℓ
3360	Пу 74	—	V
3361	Пс 05	0102	Q
3362	Пс 05	0101	Q+1
3363	+ 00	0022	V+Lℓ

336 4	Пу	74	—	μ
3365	Пч	05	P	0102
3366	Пч	05	P+1	0101
3367	+	00	0001	3353
3370	+	00	0001	3355
3371	↓1−1,	71	0100	—
3372	√П	34	3353	3373
3373	Пч	05	0101	0103
3374	Пч	05	0102	0104
3375	—	01	0072	0063
3376	+	00	0015	3372
3377	Пч	74	—	3346
3400	+	00	0072	0063
3401	—	01	0015	3372
3402	Пч	05	0103	Q+1
3403	Пч	05	0104	Q
3404	Пч	05	0035	3434
3405	↓+	20	0004	3435
3406	Пч	05	0016	3430
3407	↓+	20	0004	3431
3410	Пч	05	0023	V +L
3411	Пу	74	—	t
3412	×	03	0044	P
3413	+	00	0045	V+L l
3414	Пу	74	—	V
3415	−)	11	P	0000
3416	Пу	24	3417	0102
3417	Пч	05	P+1	0103
3420	Пч	05	0062	3422
3421	↓−	21	0041	3424
3422	(			)
3423	Пу	24	3424	P)
3424	(			
3425	Пу	24	342 6	P+1
3426	Пч	05	0042 —	V+L l
3427	Пу	74		V)
3430	(			)
3431	(			
3432	+	00	0022	V+L l
3433	Пу	74	—	μ
3434	(			)
3435	(			)

3436	+	00	0025	3422
3437	+	00	0025	3424
3440	+	00	0025	3430
3441	+	00	0025	3431
3442	+	00	0020	3435
3443	+	00	0020	3434
3444	↓1-1,	71	0061	
3445	УП	34	3422	3446
3446	Пτ	05	0060	3451
3447	Пτ	05	0057	3454
3450	Пτ	05	0075	Q+1
3451	(			)
3452	↓1-1,	71	0012	
3453	УП	34	3454	3456
3454	(			)
3455	Пу	24	3457	—
3456	Пτ	05	Q+1	Q+1
3457	УП	34	3277	3460
3460	+	00	0025	3454
3461	+	00	0025	3451
3462	↓1-1,	71	0056	3516
3463	УП	34	3450	
3464	—	01	0017	3341
3465	+	00	0072	0066
3466	Пτ	05	0065	3500
3467	↓+	20	0004	3501
3470	+	00	0072	3472
3471	↓+	20	0004	3473
3472	Пτ	05	0110	P
3473	(			)
3474	Пτ	05	2466	Q
3475	Пτ	05	2467	Q+1
3476	Пτ	05	0037	V+l
3477	Пу	74	—	V
3500	(			)
3501	(			)
3502	+	00	0025	3472
3503	+	00	0025	3473
3504	+	00	0025	3474
3505	+	00	0025	3475
3506	+	00	0020	3501
3507	+	00	0020	3500

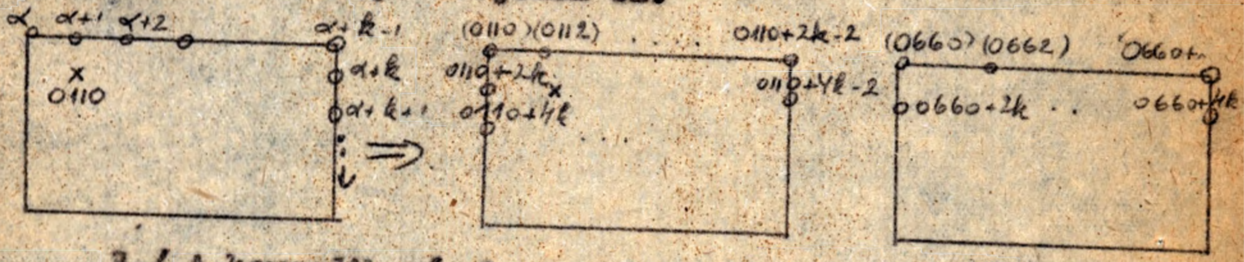
3510	↓1–1,	71	0061	—
3511	γ/II	34	3472	3512
3512	—	01	0071	3472
3513	—	01	0072	3474
3514	—	01	0072	3475
3515	IIγ	74	—	3277

A megoldás finomitásának programja.

A.program három részből áll:

1./ A 22oo -.2252 -ig terjedő részben előállitjuk a szükséges paramétereket és az ezektől függő utasitásokat.

2./ A 23oo - 2352 -ig terjedő részben kialakitunk két rácstartományt a memóriában ugy, hogy az eredetileg α -tól, fixpontos alakban elhelyezett peremértékek normalizálva az R belső rácspontjaiban - a Hu=b egyenletrendszer megoldásaként - nyert értékekkel együtt egymásután a o11o-től illetve a o66o-tól kezdődő és legfeljebb a o657 illetve 1427-ig terjedő pozicíókban helyezkedjenek el.



3./ A harmadik részben az igy kialakitott rácstartományokra felváltva alkalmazzuk a H illetve K operátorokat. /Ha az i, j, pontra alkalmazzuk H illetve K, akkor a nyert értékeket az i+55o j+55o pontnak megfelelő pozicióba visszük, s forditva./ Ha a finom tást a H operátorral végezzük, akkor a 2352.pozicióba ПJ - 2361-et irunk, ha K-val akkor ПJ - 2472-t.

Konstansok:

Felhasználjuk a Z I-rész /Hu=6/ konstansait is, a fel nem használt konstansok helyére beirjuk a következőket:

/ooo2/=	74	Πy	—	2475
/ooo3/=	o5	Πr	oo44	v.
/ooo6/=	$\frac{1}{2}$			
/ooo7/=	74	Πy	—	2323
/oo1o/=	24	Πy	2325	o66o
/oo11/=	34	γΠ	2336	2331
/oo13/=	o2		o1o6	2465
/oo14/=	oo		o55o	oooo
/oo15/=	oo		oooo	o55o
/oo16/=	$\frac{1}{20}$	=oo17		
/oo21/=	o5	Πr	P	o11o
/oo23/=	oo		ooo4	oooo
/oo24/=	oo		ooo2	ooo1
/oo26/=	oo		ooo6	ooo6
/oo27/=	o5	Πr	o112	P
/oo3o/=	o5	Πr	P	o662
/oo32/=	2^{-15}			
/oo33/=	74	Πy	—	2513
/oo34/=	11	−,	o112	o662
/oo35/=	24	Πy	2423	o663
/oo36/=	74	Πy		2411
/oo37/=	oo		oooo	ooo6
/oo4o/=	oo		ooo6	oooo
/oo41/=	oo	+	oo22	v+l
/oo42/=	74	Πy	—	24o3
/oo43/=	o5	Πr	o11o	o662
/oo44/=	74	Πy	—	25o6

Paraméterek:

/o1oo/= oo oooo ooo1 l

/o1o1/= oo oooo ooo k

/o1o2/= Πr α-1 P

/2352/= Πy { 2361 /H/ ; 2472 /K/ }

Munkapoziciók:

oo5o - oo77

Paraméterek, utasitások előállitása:

2200	10	+,	0101	0101			
2201	24	⇑γ	2202	0055	→ 00	0000	2k
2202	22	↓:	0031	0057	→ 00	0002k	0000
2203	21	↓-	0025	0060	→ 00	0002k-2	0000
2204	20	↓+	0023	0061	→ 00	0002k+2	0000
2205	20	↓+	0020	0062	→ 00	0002k+2	0002
2206	10	+,	0057	0057			
2207	24	⇑γ	2210	0063	→ 00	0004k	0000
2210	23	↓×	0031	0065	→ 00	0000	0004k
2211	11	-,	0012	0101			
2212	24	⇑γ	2212	0066	→ 00	0000	000k-1
2213	21	↓-	0012	0067	→ 00	0000	000k-2
2214	21	↓-	0012	0064	→	,, —	k-3
2215	12	:,	0032	0100			
2216	24	⇑γ	2216	0071			
2217	12	:,	0032	0101			
2220	33	↓×,	0071				
2221	22	↓:	0006	0071	→ 00	0000	00021k
2222	32	↓:,	0031	0072	→ 00	00021k	000
2223	20	↓+	0071	0073	→ 00	00021k	00021k
2224	10	+,	0043	0055			
2225	24	⇑γ	2226	2302		0110	0662+2k
2226	20	↓+	0004	2303			
2227	05	⇑τ	0102	2320			
2230	05	⇑τ	0021	2323			
2231	20	↓+	0004	2325			
2232	05	⇑τ	0010	2324			
2233	20	↓+	0024	2326			
2234	05	⇑τ	0011	2330			
2235	05	⇑τ	0035	0074	⇑γ	2423	0663
2236	05	⇑τ	0030	0075	⇑τ	P	0662
2237	11	-,	0012	0100			
2240	24	⇑γ	2241	0054			
2241	05	⇑τ	0027	0076	⇑τ	0112	P
2242	10	+,	0055	0057			
2243	20	↓+	0034	0070	-,	0112+2k	0662+2k
2244	31	↓¬	0026	—			

[illegible]

A két rácstartomány kialakítása.

```
2245   2o  ↓+  oo73 oo73   →  o11o+2k+2lk-4 o663 +2k+2lk-4
2246   o5  Πτ  oo14 oo53            oo o55o oooo
2247   o5  Πτ  oo15 oo52            oo oooo o55o
225o   1o  +,  oo72 oo63
2251   2o  ↓+  oo13 oo72      o2 o1o6+21k+4k 2465
2252   74  Πy   —   23oo
23oo   o5  Πτ  oo54 oo5o
23o1   o5  Πτ  oo64 oo51   →        oo oooo k-3
23o2   (                )
23o3   (                )
23o4   oo  +   oo2o 23o2
23o5   oo  +   oo2o 23o3
23o6   o1  -   oo12 oo51
23o7   34  YΠ  231o 23o2
231o   oo  +   oo22 23o2
2311   oo  +   oo22 23o3
2312   o1  -   oo12 oo5o
2313   34  YΠ  2314 23o1
2314   o5  Πτ  oo2o oo5o   →        oo oooo ooo2
2315   o5  Πτ  ooo7
2316   o5  Πτ  oo66 oo51
2317   oo  +   ooo5 232o
232o   (                )
2321   o5      oooo  P+1
2322   74       —    v
2323   (                )
2324   (                )
2325   (                )
2326   (                )
2327   —       oo12 oo51
233o   (                )
2331   oo  +   oo5o 2323
2332   oo  +   oo5o 2324
2333   oo  +   oo5o 2325
2334   oo  +   oo5o 2326
2335   74  Πy   —   2317
2336   o5  Πτ  o1oo oo51
2337   o5  Πτ  oo55 oo5o
234o   oo  +   oo23 233o
2341   74  Πy   —   2331
```

```
2342  05  Пz 0067 0051
2343  00 +    0023 2330
2344  11 -,   0020 0000
2345  24  Пy 2331 0050
2346  05  Пz 0054 0051
2347  00 +    0023 2330
2350  11 -,   0055 0000
2351  24  Пy 2331 0050
2352  (                )

2361  05  Пz 0041 2417
2362  05  Пz 0042 2402
2363  10 +,   0055 0074
2364  24  Пy 2365 2422
2365  10 +,   0055 0075
2366  24  Пy 2367 2423
2367  05  Пz 0054 0050
2370  05  Пz 0064 0051
2371  05  Пz 0076 2403
2372  20  ↓+ 0062 2405
2373  20  ↓+ 0060 2411
2374  21  ↓- 0061 2415
2375  10 +,   0004 2403
2376  24  Пy 2377 2404
2377  20  ↓+ 0062 2406
2400  20  ↓+ 0060 2412
2401  21  ↓- 0061 2416
2402  (                )
2403  (                )
2404  (                )
2405  (                )
2406  (                )
2407  05  Пz 0036    v+f
2410  74  Пy           μ
2411  (                )
2412  (                )
```

[illegible]

2413	00	+	0022		v+l
2414	74	Пy	—		μ
2415	(				)
2416	(				)
2417	(				)
2420	74	Пy	—		μ
2421	11	-,	0020		P+1
2422	(				)
2423	(				)
2424	01	—	0012	0051	
2425	34	YП	2432	2426	
2426	00	+	0020	2422	
2427	00	+	0020	2423	
2430	00	+	0025	2403	
2431	74	Пy		2372	
2432	01	—	0012	0050	
2433	34	YП	2441	2434	
2434	00	+	0037	2422	
2435	00	+	0037	2423	
2436	05	Пτ	0064	0051	
2437	00	+	0040	2403	
2440	74	Пy	—	2372	
2441	05	Пτ	0070	2446	
2442	20	↓+	0004	2443	
2443	(			)	
2444	71	↓I-I,	0012		
2445	34	YП	2446	2455	
2446	(			)	
2447	71	↓I-I,	0012		
2450	34	YП	2451	2455	
2451	00	+	0001	2443	
2452	00	+	0001	2446	
2453	71	↓I-I,	0073		
2454	34	YП	2443	2464	
2455	00	+	0053	0076	
2456	01	—	0052	0074	
2457	01	—	0052	0075	
2460	11	-,	0053	0000	
2461	24	Пy	2462	0053	
2462	11	-,	0052	0000	

```
2463    24  Пу  2363 0054
2464    05  Пz  0013   β
2465    00  +   0025   β
2466    71  ↓1-1, 0072
2467    34  УП  перех.  β'


2472    05  Пz  0002 2402
2473    05  Пz  0003 2417
2474    74  Пу    -  2363
2475    21  ↓-  0057 2510
2476    20  ↓+  0023 2514
2477    20  ↓+  0063 2520
2500    21  ↓-  0023 2524
2501    21  ↓-  0004 2523
2502    20  ↓+  0023 2517
2503    21  ↓-  0063 2513
2504    21  ↓-  0023 2507
2505    74  Пу    -  2403
2506    00  +   0020 P+1.
2507    (                )
2510    (                )
2511    05  Пz  0033   v+l
2512    74  Пу    -    u
2513    (                )
2514    (                )
2515    00  +   0022   v+l
2516    74  Пу  -      u
2517    (                )
2520    (                )
2521    00  +   0022   v+l
2522    74  Пу  -      u
2523    (                )
2524    (                )
2525    00  +   0022   v+l.
```

2526	74	Пу —	u
2527	00	+0017	P+1
2530	03	×0016	P
2531	00	+0022	v+e
2532	74	Пу —	v
2533	05	ПСР+1	P+1
2534	24	Бу2422	P+1

Felhasznált irodalom:

1/. L. Collatz: Numerische Behandlung von differentiálgleichungen./Springer-Verlág Berlin ... 1955./

2/. Milne: Csiszlennoje pesenie differenciálnih urábnenii. /Numerical solution of differentiál equations./ /Izdátelsztvo inosssztránnoj literáturi.1955./

3/. Békéssy András: Közönséges differenciálegyenletek numerikus integrálása. /Mérnöki Továbbképző Intézet 1953-54.évi előadás-sorozatából:2706./

4/.D. J. Panow:Formelsamlung zur numrischen Behandling partieller differentiálgleichungen nach dem differenzenverfahren. / Akademie-Verlag .Berlin./

5/.Booth: Numerical methods London. Butterworths .1955./

6/. Hajós György: Numerikus és grafikus módszerek./Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat. Budapest./

Az M-3 utasitás rendszere

Kód:	Jel:	Magyarázat
00	+	Az első cim tartalmához hozzáadódik a második cim tartalma és beiródik a memoriába a második cimre.
1o	+)	Az első cim tartalmához hozzáadódik a második cim tartalma, de a memoriába nem irodik be.
2o	↓+	Az előző müvelet eredményéhez hozzáadódik az első cim tartalma és az eredmény beiródik a memoriába a második cimre.
3o	↓+)	Az előző müvelet eredményéhez hozzáadódik az első cim tartalma, de a memoriába nem iródik be.
4o	+Π	Az első cim tartalmához hozzáadódik a második cim tartalma. Az eredmény beiródik a memoriába a második cimre és kinyomtatódik.
5o	|+|)	Az első cim tartalmának abszolut értékéhez hozzáadódika a második cim tartalmának abszolut értéke, de a memoriába nem iródik be.
6o	↓+Π	Az előző.müvelet eredményéhez hozzáadódik az első cim tartalma.Az eredmény beiródik a memoriába a második cimre és kinyomtatódik.
7o	↓|+|)	Az előző müvelet eredményének abszolut értékéhez hozzáadódik az első cim tartalmának abszolut értéke, de a memoriába nem iródik be.
o1	—	A második cim tartalmából kivonódik az első cim tartalma és az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.
11	—)	A második cim tartalmából kivonódik az első cim tartalma, de a memoriába nem irodik be, - az eredmény megmarad az eritmetikai egységben.
21	↓—	Az előző müvelet eredményéből kivonódik az első cim tartalma, az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.
31	↓—)	Az előző müvelet eredményéből kivonódik az első cim tartalma, az eredmény nem iródik le.
41	—Π	A második cim tartalmából kivonódik az első cim tartalma, az eredmény beiródik a második cimre és kinyomtatódik

51 $|-|,$ A második cim tartalmának abszolut értékéből kivonódik az első cim tartalmának abszolut értéke, az eredmény nem iródik le.

61 $\downarrow -\top$ Az előző müvelet eredményéből kivonódik az első cim tartalma. Az eredmény beiródik a második cimre és kinyomtatódik.

71 $\downarrow |-|,$ Az előző müvelet eredményének abszolut értékéből kivonódik az első cim tartalmának abszolut értéke, de a memóriába nem iródik be.

02 $:$ A második cim tartalma elosztódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

12 $:,$ A második cim tartalma elosztódik az első cim tartalmával. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

22 $\downarrow :$ Az előző müvelet eredménye elosztódik az első cim tartalmával és az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

32 $\downarrow :,$ Az előző müvelet eredménye elosztódik az első cim tartalmával. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

42 $:\top$ A második cim tartalma elosztódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

52 $|:|,$ A második cim tartalmának abszolut értéke elosztódik az első cim tartalmának abszolut értékével, de a memóriába nem iródik be.

62 $\downarrow :\top$ Az előző müvelet eredménye elosztódik az előző cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

72 $\downarrow |:|,$ Az előző müvelet eredményének abszolut értéke elosztódik az első cim tartalmának abszolut értékével, de a memóriába nem iródik be.

03 $\times$ A második cim tartalma összeszorzódik az első cim tartalmával Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

13 $\times,$ A második cim tartalma összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

23 $\downarrow\times$ Az előző müvelet eredménye összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

33 $\downarrow\times,$ Az előző müvelet eredménye összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

43 $\times\Pi$ A második cim tartalma összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

53 $|\times|,$ A második cim tartalmának abszolut értéke összeszorzódik az első cim tartalmának abszolut értékével, de a memóriába nem iródik be.

63 $\downarrow\times\Pi$ Az előző müvelet eredménye összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

73 $\downarrow|\times|,$ Az előző müvelet eredményének abszolut értéke összeszorzódik az első cim tartalmának abszolut értékével, de a memóriába nem iródik be.

06 $\wedge$ A második cim tartalma logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával, és az eredmény beiródik a memóriába, a második cimre.

16 $\wedge,$ A második cim tartalma logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény megmarad az aritmetikai egységben.

26 $\downarrow\wedge$ Az előző müvelet eredménye logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával és az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

36 $\downarrow\wedge,$ Az előző müvelet eredménye logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

46 ΛΠ. A második cim tartalma logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

56 |Λ|, A második cim tartalmának abszolut értéke logikailag összeszorzódik az első cim tartalmának abszolut értékével. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

66 ↓ΛΠ Az előző müvelet eredménye logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

76 ↓|Λ|, Az előző müvelet eredményének abszolut értéke logikailag összeszorzódik az első cim tartalmának abszolut értékével, de a memóriába nem iródik be.

7 27 Bb Szám bevitele. A szám a perforált szalagról beiródik a második cimre. A regiszterben nem marad meg.

5 15 Πτ Az első cim tartalma átmegy a második cimre és megmarad az aritmetikai egység kettes számu regiszterében.

45 55 ΠτΠ Az első cim tartalma átmegy a második cimre és kinyomtatódik, de az aritmetikai egységben nem marad meg.

24 Πy. Vezérlés átadás. A következő utasitást a gép az első cimről veszi. Az előző müvelet eredménye beiródik a második cimre és megmarad az aritmetikai egységben.

64 ΠyΠ Ugyanaz mint a 24-es utasitás, de a szám még ki is nyomtatódik.

74 ΠY A következő utasitást a gép a második cimről veszi. Az aritmetikai egységben megmarad az előző müvelet eredményének abszolut értéke.

34 YΠ. Feltételes ugrás. A következő utasitást a gép a második cimről veszi, ha az előző müvelet eredménye pozitiv, és az első cimről ha az előző müvelet eredménye negativ.

04 Megállási utasitások az aritmetikai egység regisztereinek
14 valamint a kiválasztó és beindító regiszterek tartalmában
44 különböznek egymástól.
54

17 megállás
37
57
77

\- \- \- \- \- \- \- \- \-

A logikai szorzás - az helyértékenkénti operáció, a következő szabályok szerint:

$$0 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 0$$
$$1 \times 0 = 0$$
$$1 \times 1 = 1$$