PÉTER RÓZSA EMLÉKÉRE

RUZSA IMRE ÉS URBÁN JÁNOS

> „Én nemcsak azért szeretem a matematikát, mert alkalmazni lehet a technikában, hanem főleg azért, mert szép. Mert játékos kedvét is belevitte az ember és a legnagyobb játékra is képes: megfoghatóvá tudja tenni a végtelent."
>
> Péter Rózsa
>
> (A „Játék a végtelennel" előszavából.)

1977. február 17-én, hetvenkettedik születésnapján, elhunyt Péter Rózsa professzor, a rekurzív függvények elméletének nemzetközileg elismert kiváló tudósa, a magyar matematikatanítás korszerűsítésének fáradhatatlan harcosa, Társulatunknak tiszteletbeli elnöke és élete végéig aktív tagja.

Életútját az emberek és a szépség szeretetének axiómája határozta meg. A szépség szeretete öltött testet matematikai munkásságában, melynek maradandó emlékei dolgozatai és monográfiái. Az emberek és a szépség szeretete késztette arra, hogy a matematika szépségeiből minél többet tegyen hozzáférhetővé az emberek minél szélesebb köre számára. Így életaxiómájából szükségszerűen következik harca a matematika megszerettetéséért, terjesztéséért, tanításának korszerűsítéséért. E munkáját írott művek és a matematikatanítás megújhodásában elért eredményeink örökítik meg. De ugyancsak életaxiómájából következett mások munkájának segítése, a kezdők felkarolása, a tehetségek kibontakozásának istápolása; ezt a tevékenységét többnyire csak azok ismerik, akik támogatását élvezték; ennek dokumentumai az emberek szívében élnek tovább.

Életútja

Péter Rózsa 1905. február 17-én született Budapesten. Itt végezte elemi iskolai és gimnáziumi tanulmányait is. 1922-ben érettségizett a Mária Terézia leánygimnáziumban. Már 15 éves korától kezdve korrepetálással járul hozzá családja anyagi helyzetének segítéséhez. Bár édesapja ügyvéd volt, mégis ő indította el a természettudományos gondolkodás útján. Érettségi után, apja kívánságának megfelelően, a budapesti tudományegyetem vegyész szakára íratkozott be. Saját bevallása szerint legszívesebben matematika—magyar szakpárosítást választott volna, ha ilyen lett volna. Ez az önvallomás fontos kulcs Péter Rózsa világszemléletének megértéséhez.

Egyetemi évei során csakhamar minden érdeklődését a matematika vette igénybe. Ebben nyilván jelentős szerepet játszott az, hogy olyan kiváló professzoroktól tanulhatott, mint Fejér Lipót és Kürschák József. De életútjára tanárainál is nagyobb hatással volt egyik évfolyamtársa, Kalmár László.

Matematikai kutatómunkája a számelmélet területén kezdődött. Még egyetemi éveihez kapcsolódnak első eredményei a páratlan tökéletes számokról.[1] A hozzá-

[1] Tökéletes számoknak mondjuk azokat a pozitív egész számokat, amelyek *valódi* osztóinak összege magát a számot adja; pl. $28=1+2+4+7+14$. *Páratlan* tökéletes számra nem ismerünk példát, a sejtés az, hogy ilyenek nincsenek. Péter Rózsa egyik eredménye szerint, ha lennének is páratlan tökéletes számok, adott k pozitív egészhez csak véges sok olyan lehetne, melynek k különböző prímosztója van. Vö.: Erdős Pál—Surányi János, *Válogatott fejezetek a számelméletből,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1960, 211—214.

férhető információk alapján eredményei újaknak tűntek, de később értesült arról, hogy egy részüket már más szerzők fölfedezték és publikálták. Ez a tény átmenetileg megtörte Péter Rózsa érdeklődését a matematika iránt. Elzárkózott eredményeinek publikálásától (annak ellenére, hogy ezek tartalomban és a bizonyítás módjában számos új vonást foglaltak magukban a már publikált eredményekhez viszonyítva), sőt, úgy határozott, hogy nem foglalkozik többé matematikai problémákkal. Mint Kalmár László elbeszéléséből tudjuk, ebben az időszakban matematikai költemények írásával kezdett foglalkozni, s ebben is igen tehetségesnek mutatkozott.

1927-ben, egyetemi tanulmányait befejezve, matematika–fizika szakos középiskolai tanári oklevelet nyer. Két évi állástalanság (és néhány havi beteghelyettesítő tanári munka) után ideiglenes polgári iskolai tanári állást kap a fővárosnál. Ezzel veszi kezdetét élete végéig tartó pedagógusi pályafutása, melynek részletes méltatására visszatérünk.

Kalmár László fáradhatatlan erőfeszítései sikeresen felújították Péter Rózsa érdeklődését a matematika iránt. Kedvező mozzanat volt e szempontból egy matematikatörténeti esemény is. Ezekben az években bontakoztak ki erőteljesen *a matematika alapjaival* kapcsolatos kutatások, a David Hilbert kezdeményezte *bizonyításelmélet* vagy *metamatematika* keretében. E kutatások csúcsteljesítményét kétségtelenül Kurt Gödel 1931-ben publikált, a matematikai metodológiáját és filozófiáját érintő, váratlan eredményeket tartalmazó munkája alkotja. Az említett témakörben s Gödel eredményeiben is jelentős szerephez jutott a számelméleti függvények családjának egy speciális része, az ún. *rekurzív függvények* osztálya. Kalmár László hatására Péter Rózsa figyelme a rekurzív függvények felé fordult. Ez a témakör végigkísérte egész kutató matematikusi pályafutását. (Ennek részletes méltatására ugyancsak visszatérünk.) Speciális szakterülete a rekurzív függvények elmélete lett. Az 1932. évi zürichi nemzetközi matematikai kongresszuson számolt be először idevágó kutatási eredményeiről, s a következő években publikálta részletesen (többnyire külföldi matematikai folyóiratokban) egyre gyarapodó eredményeit. E témakörből írta doktori értekezését is, melyet *summa cum laude* minősítéssel védett meg 1935-ben. A harmincas évek második felében már mint a rekurzív függvények elméletének egyik nemzetközileg elismert specialistáját tartja számon a matematikus közvélemény. E tényt jelzi az is, hogy az 1937-ben alapított tekintélyes amerikai szakfolyóirat, a „The Journal of Symbolic Logic", szerkesztőbizottsági tagnak kérte föl. Szerkesztői munkáját még a második világháború alatt is folytatta (svájci közvetítéssel).

Ez a nemzetközi megbecsülés azonban semmilyen kedvező hatással nem volt Péter Rózsa hazai helyzetére. 1939-ben a fasiszta törvények ideiglenes tanári állásától is megfosztották. A háborús esztendők súlyos megpróbáltatást jelentettek számára, de munkakedvét nem törték meg. Ezekben az években írta világhírűvé vált népszerűsítő könyvét „Játék a végtelennel" címen. A könyvet 1943-ban kinyomtatták, de forgalomba hozatalát a fasiszta törvények megakadályozták. A raktáron maradt készlet nagy része a bombázások során megsemmisült, a megmaradt példányokkal 1945-ben, az első szabad könyvnapokon találkozhatott a közönség. A könyv azóta 4 újabb magyar és 14 külföldi kiadást ért meg. (Lásd [I] alatt. A szögletes zárójelek közé írt számok Péter Rózsa munkáinak a cikk végén található jegyzékére utalnak.)

A felszabadulás után kapott végre Péter Rózsa középiskolai tanári kinevezést. A pedagógiai főiskolák megszervezésekor a budapesti főiskola tanára, majd a matematikai tanszék létrehívásakor annak vezetője lett. 1950-ben elnyeri a budapesti tudományegyetemen a magántanári címet a matematika alapjai tárgykörből. A budapesti pedagógiai főiskola megszűntekor (1955-ben) az Eötvös Loránd Tudományegyetem professzora lett. Itt tanított nyugalomba vonulásáig, 1975-ig.

1951-ben jelent meg (német nyelven) a rekurzív függvényekről szóló monográfiája, amely magában foglalja addigi kutatási eredményeit. E könyvéért és addigi munkásságáért 1951-ben Kossuth-díjjal tüntették ki. 1952-ben elnyeri a matematikai tudományok doktora akadémiai fokozatot. Matematikai ismeretterjesztő munkásságáért 1953-ban a Bolyai János Matematikai Társulat a Beke Manó emlékdíjjal jutalmazza. Ugyanebben az évben felkérték az akkor induló NDK-beli szakfolyóirat, a „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" szerkesztőbizottsági tagjául.

A rekurzív függvények elmélete kezdetben kizárólag a bizonyításelméleti kutatások segédeszközeként funkcionált. Alighanem Péter Rózsa volt az első, aki önálló, „önmagukban vett" tanulmányozásukat elkezdte. Talán ez az ősforrástól való elszakítás is szerepet játszhatott abban, hogy felfedezte a rekurzív függvény fogalmának általánosítási lehetőségét, továbbá a matematika más ágaiban való alkalmazás néhány lehetőségét is. 1960 körül kiderült, hogy a rekurzív függvények gyakorlati (nem tiszta matematikai) alkalmazásaira is széles lehetőségek vannak, jelesen a programvezérlésű elektronikus számológépekkel kapcsolatban, a matematikai nyelvészetben és másutt.

Péter Rózsát saját, belső indíttatású kutatásai szinte automatikusan vezették el a gyakorlati jelentőségű témákhoz. 1961 óta megjelent tanulmányainak túlnyomó része a rekurzív függvények elméletének speciális alkalmazási problémáihoz kapcsolódik. 1976-ban (német nyelven) megjelent monográfiája összefoglalja idevágó eredményeit: a rekurzív függvények számítógépes programozásban való alkalmazásának elméleti problémáit.

Péter Rózsa matematikai, pedagógiai és tudományos-közéleti munkásságát szocialista államunk nagyra értékelte. Az elismerés jeleként kapta a Munka Érdemrend arany fokozatát (1967), az Állami Díj I. fokozatát (1970), és a Magyar Népköztársaság Zászlórendje második fokozatát (1975). 1973-ban a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjává választotta. 1974-ben a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége díjával tüntették ki. Haláláig tiszteletbeli elnöke volt a Bolyai János Matematikai Társulatnak.

1975-ben vonult nyugalomba. Élete hátralevő két esztendejét csaknem teljesen a matematikatanítás reformja ügyének szentelte. Elhatalmasodó betegsége ellenére, életének csaknem utolsó napjaiig dolgozott. Hosszú betegség után, 1977. február 17-én hunyt el.

A kutató matematikus

Péter Rózsa fő kutatási területe — mint jeleztük — a rekurzív függvények elmélete volt. A rekurzív függvények a természetes számok halmazán értelmezett, természetes szám értékeket fölvevő, ún. *számelméleti függvények* speciális részosztályát alkotják. (A természetes számok halmazához a 0-t is hozzáértjük.) Támaszkodva arra a tényre, hogy a 0-ból kiindulva, egyenkénti továbbszámlálással (az 1 ismételt hozzáadásával) bármely természetes szám elérhető (ismétlődés föllépése nélkül), egy számelméleti függvény definiálásának legyegyszerűbb módjaként az kínálkozik, hogy megadjuk a függvény értékét a 0 helyen, és megmondjuk, hogy hogyan számítható ki a függvény értéke az $n>0$ helyen, ha az n-et megelőző helyeken fölvett értékeket már ismerjük. A függvénymegadás e módját nevezzük *rekurziónak*, s az ily módon értelmezhető függvényeket *rekurzív függvényeknek*. A kiszámítási eljárás körülhatárolásától függően a rekurzív függvények különböző osztályai értelmezhetők.

A rekurzió legegyszerűbb típusában, az ún. *primitív rekurzióban* az $n+1$ helyen fölvett függvényérték megadásakor csak az n helyen fölvett függvényértékekre hivatkozunk. Vezessük be az $n'=n+1$ jelölést.[2] Az f függvényt az α konstans és a (már ismertnek feltételezett) kétváltozós β függvény segítségével értelmezzük a következő módon:

$$f(0) = \alpha,$$

$$f(n') = \beta(n, f(n)).$$

Ez *a primitív rekurzió sémája*. A sémát *többváltozós* f függvényekre így általánosítjuk:

$$(1)\qquad \begin{cases} f(0, a_1, \dots, a_k) = \alpha(a_1, \dots, a_k), \\ f(n', a_1, \dots, a_k) = \beta(n, a_1, \dots, a_k, f(n, a_1, \dots, a_k)). \end{cases}$$

Itt f a definiálandó $k+1$ változós függvény; α k-változós, β pedig $k+2$ változós függvény (mindkettő ismertnek feltételezve). Ez magában foglalja az előző sémát is, a $k=0$ speciális esetben. Az általános sémában az $a_1, \dots, a_k$ változók mint *paraméterek* szerepelnek, melyek értéke a rekurziós sémában nem változik. Megengedjük, hogy az α és a β függvényekben *fiktív* változók is előfordulhassanak, azaz olyan változók, amelyektől a függvény értéke ténylegesen nem függ.

Illusztrációként legyen a definiálandó kétváltozós függvény az „$a+n$" összeadás, amelyet most (a séma kedvéért) „$f(n, a)$"-val jelölünk. A szereposztás:

$$\alpha(a) = a; \qquad \beta(n, a, b) = b'.$$

(Tehát itt β valójában egyváltozós függvény: ténylegesen csak a harmadik változójától függ.) Az $f(n, a)$ függvény primitív rekurzív definiálása α és β segítségével, az (1) séma szerint, a következő:

$$f(0, a) = a,$$

$$f(n', a) = \big(f(n, a)\big)'.$$

Vagy, $f(n, a)$ helyett „$a+n$"-et írva:

$$a+0 = a,$$

$$a+n' = (a+n)'.$$

A definíció csak az $\alpha(a)=a$ ún. *azonosságfüggvény* és az n' függvény ismeretére épít. De az azonosságfüggvény is definiálható primitív rekurzióval:

$$\alpha(0) = 0,$$

$$\alpha(n') = n'.$$

Ez a definíció csak a 0 konstans és az n' függvény ismeretére támaszkodik. Vegyük észre, hogy minden természetes szám definiálható 0 és n' segítségével: $1=0'$, $2=(0')'=1'$, $3=\big((0')'\big)'=2'$ stb.

[2] Ez a jelölés azért is célszerű, mert — mint hamarosan látni fogjuk — az összeadás rekurzíve definiálható az eggyel való továbbszámlálás, azaz az $S(n)=n'=n+1$ függvény segítségével.

Primitív rekurzív függvényeknek mondjuk azokat a függvényeket, amelyek a 0 konstansból és az n' függvényből kiindulva, végesszámú helyettesítésekkel és primitív rekurziókkal (azaz az (1) séma szerinti definíciókkal) nyerhetők.[3]

A primitív rekurzív függvények először (még nem ezzel az elnevezéssel) K. Gödelnek az axiómarendszerek eldönthetetlen problémáira vonatkozó vizsgálataiban szerepeltek (1931).[4] Más típusú rekurzív függvények már korábban, D. Hilbert és Th. Skolem munkáiban is előfordultak[5]. Hilbert a rekurzív függvények egy olyan osztályát értelmezte, melyek elemeinek megadásakor primitív rekurziókon kívül ún. *beskatulyázott rekurziók* is megengedettek, mint pl. a következő definíciósémában:

$$f(0, a) = \alpha(a),$$

$$f(n', a) = \beta(n, a, f(n, a), f(n, \gamma(a))).$$

(Itt α, β és γ már definiált függvények.) Lényeges, hogy most $f(n', a)$ kiszámításához nemcsak $f(n, a)$ értékét, hanem $f(n, \gamma(a))$ értékét is kell ismernünk, vagyis föl kell tételeznünk, hogy $f(n, x)$ az x *minden* értékére, s nemcsak az $x=a$ esetben ismert. Péter Rózsa első eredményei közé tartozik annak kimutatása, hogy a beskatulyázott rekurziók kifejezhetők primitív rekurziók (és helyettesítések) segítségével (l. [2]). Ugyancsak kimutatta, hogy az ún. *értékkészlet rekurzió* — amelyben $f(n', a_1, \ldots, a_k)$ kiszámításához az $f(m, a_1, \ldots, a_k)$ függvényértékek ismerete az $m \leqq n$ helyeken (tehát nemcsak az $m=n$ helyen) is szükséges — sem vezet ki a primitív rekurzív függvények osztályából.

Vannak olyan, effektíve kiszámítható számelméleti függvények is, amelyek nem tartoznak a primitív rekurzív függvények körébe. Ilyen függvényre az első példa W. Ackermanntól származik.[6] Ennek definíciójában két változó szerinti, ún. *kétszeres rekurzió* szerepel (éspedig beskatulyázottan). Péter Rózsa [3] dolgozatában lényegesen egyszerűsítette Ackermann tárgyalását. Bevezette a kétváltozós $P(m, n)$ függvényt — melyet a szakirodalom Péter-féle függvény néven tart számon — a következő definícióval:

$$P(0, n) = n', \qquad P(m', 0) = P(m, 1),$$

$$P(m', n') = P(m, P(m', n)).$$

Megmutatta, hogy minden primitív rekurzív f függvényhez van olyan m szám, hogy

$$\text{minden } n\text{-re:} \quad f(n) < P(m, n).$$

Ha tehát P is primitív rekurzív lenne, akkor létezne olyan m, hogy

$$\text{minden } n\text{-re:} \quad P(n, n) < P(m, n)$$

teljesülne, s így (n-et m-mel helyettesítve), $P(m, m) < P(m, m)$ lenne, ami lehetetlen;

[3] Ez a meghatározás Péter Rózsától származik. A szakirodalomban más, de ezzel egyenértékű definíciók is ismertek; ezekben fiktív változók szerepeltetése csak az $\alpha(x_1, \ldots x_n) = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n,\ n \geqq 1)$ sémában megengedett.

[4] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I., *Monatshefte für Math. und Phys. 38* (1931), 173—198. old.

[5] D. Hilbert, Über das Unendliche. *Math. Annalen 95* (1926), 161—190. old. — Th. Skolem, Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. *Videnskapsselskapets Skrifter*, I. Mat. Naturv. Kl. *6* (1923), 3—38. old.

[6] W. Ackermann: Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. *Math. Annalen 99* (1928), 118—133. old.

ennélfogva P nem lehet primitív rekurzív. (A bizonyítás a Cantor-féle diagonális módszer[7] szép alkalmazása.)

A kétszeres rekurzió általánosítása a k-szoros rekurzió ($k \geqq 2$). Ennek részletes vizsgálatával foglalkozik Péter Rózsa [5] dolgozata. Megmutatja, hogy a $k+1$-szeres rekurzió kivezet a legföljebb k-szoros rekurzióval definiálható függvények osztályából. Fő eredménye: megmutatja, hogy minden k-szoros rekurzióval definiált $f(n_1, ..., n_k)$ függvény előállítható a következő alakban:

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \alpha\big((\mu x)[\beta(x, n_1, \ldots, n_k) = 0]\big),$$

ahol α egyváltozós, β pedig olyan $k+1$ változós primitív rekurzív függvény, hogy a

$$\beta(x, n_1, \ldots, n_k) = 0 \tag{2}$$

egyenlet megoldható x-re a természetes számok körében ($n_1, ..., n_k$ bármely rögzített értékeire), és a

$$(\mu x)[\beta(x, n_1, \ldots, n_k) = 0]$$

kifejezés a (2) egyenlet legkisebb megoldását jelöli. Ez az eredmény, amelyhez ezidőtájt mások is eljutottak, lényeges szerepet játszik az ún. általános rekurzív függvény fogalmában. *Általános rekurzív függvényeknek* mondjuk azokat a számelméleti függvényeket, amelyek a 0-ból és az n'-ből kiindulva, helyettesítések, primitív rekurziók és a

$$\gamma(n_1, \ldots, n_k) = (\mu x)[\beta(x, n_1, \ldots, n_k) = 0]$$

séma segítségével definiálhatók (kikötve a (2) egyenlet megoldhatóságát x-re, az $n_1, ..., n_k$ változók bármely rögzített értékei mellett). Alonzo Church híres hipotézise szerint az általános rekurzív függvények osztálya azonos az *effektíve kiszámítható* számelméleti függvények osztályával. E hipotézisre eddig nem ismeretes cáfoló ellenpélda.

Az 1936. évi oslói matematikai kongresszuson Péter Rózsa az ún. magasabb fokú rekurziókkal foglalkozott (l. [6]). Ezek úgy jönnek létre, hogy függvényváltozóktól is függő függvények definiálását is megengedjük. Későbbi munkáiban (lásd [13], [14], [25]) további fontos eredményeket ért el e témakörben, és rámutatott számos, jelenleg még megoldatlan problémára is.

A nemzetközi matematikai irodalomban Péter Rózsa tollából jelent meg az első átfogó monográfia a rekurzív függvényekről (lásd [12]). A könyv részletesen tárgyalja a különböző rekurzió-fogalmakat, ezek kapcsolatát, a primitív rekurzióra visszavezethető rekurziótípusokat, továbbá foglalkozik az általános és a parciális[8] rekurzív függvényekkel is, megmutatva kapcsolatukat a primitív rekurzív függvényekkel, valamint az effektív kiszámíthatóság szemléletes fogalmának körülhatárolását célzó egyéb fogalmakkal. Jelentős teret szentel a szerző az elmélet matematikai (főleg bizonyításelméleti) alkalmazásainak is. Jellemző, hogy a könyv anyagának túlnyomó része a szerző saját eredménye.

S. C. Kleene, az általános rekurzív függvények elméletének fő kidolgozója, a könyvről írott recenziójában[9] így méltatja a szerzőt: „1932 óta Péter Rózsa egy sor

[7] Lásd pl. Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok*, 5. kiadás, Tankönyvkiadó 1975, 24—26. old.

[8] A parciális rekurzív függvények csak annyiban különböznek az általános rekurzív függvényektől, hogy változóik egyes értékeire esetleg nincsenek értelmezve. Ahol értelmezve vannak, ott éppúgy effektíve kiszámíthatók, mint az általános rekurzív függvények. De nincs kikötve annak effektív eldönthetősége, hogy egy parciális rekurzív függvény adott helyen definiált-e.

[9] Lásd: *Bulletin of the American Math. Soc. 58* (1952), 270—272.

cikket publikált, melyekben a rekurzió különféle speciális formáinak kapcsolatát vizsgálta, megmutatva új függvények definiálhatóságát rekurziók egyre magasabb típusaival; e munkák őt a speciális rekurzív függvények elméletének vezető kimunkálójává avatják." A könyv orosz kiadásának (1954) bevezetőjében pedig N. Kolmogorov szovjet akadémikus e szavakkal mutatja be a szerzőt: „A könyv szerzője, Péter Rózsa, jól ismert magyar matematikus, akinek fontos része volt a rekurzív függvények modern elméletének megalkotásához vezető kezdő lépésekben. 1932—1935 közötti munkái, melyek főleg a primitív rekurzív függvények osztálya tényleges terjedelmének tisztázására irányultak, lényeges mértékben hozzájárultak a ‚rekurzivitás' azon szélesebb eszméjének kikristályosításához, amelyet az általános, ill. a parciális rekurzív függvény fogalma fejez ki."

A könyv orosz, kínai és angol fordításai az egész világon jelentős befolyást gyakoroltak a rekurzív függvényekkel kapcsolatos kutató munkára, kialakítva Péter Rózsa „indirekt" tanítványainak körét. Ebben jelentős szerepe van a monográfia könnyed stílusának és annak a pedagógiai művészetnek, amellyel a szerző a legnehezebb problémát is szemléletes aspektusból képes megközelíteni. E pedagógia egyik stílusjegye, hogy egyetlen téma tárgyalása sem kezdődik előrebocsátott definícióval, hanem az alkalmas definíció a fölvetett probléma elemzésének eredményeként bontakozik ki. Hasonló művészettel különíti el a bizonyításokban a lényeges nehézséget okozó fő részeket a mellékesektől, rendszerint speciális esetekre korlátozva a bizonyítást, amelyből az általános esetre való áttérés már könnyen kiolvasható.

Péter Rózsa nagy szakmai tekintélyét illusztrálja, hogy számos külföldi egyetemre és nemzetközi tanácskozásra hívták meg előadást tartani. 1967-ben az ő tiszteletére rendeztek nemzetközi kollokviumot Tihanyban a rekurzív függvényekről és alkalmazásaikról.

Említettük, hogy a rekurzív függvények elméletének kialakulása a matematika alapjaival kapcsolatos kutatásokhoz fűződik. Péter Rózsa, szűkebb szakterületén túl, a matematika alapjai témakör alapos ismerője és egyetemi előadója volt. E témakörbe vágnak [8], [10], [20] és [34] alatti dolgozatai. Kalmár László az 1948. évi amsterdami filozófiai világkongresszuson számolt be egy idevágó, elvi jelentőségű közös eredményükről.[10]

A matematika filozófiája tekintetében Péter Rózsa nem csatlakozott az ismert irányzatok egyikéhez sem, bár kétségtelenül Hilbert nézetei álltak felfogásához legközelebb. De határozottan elutasította a matematika ún. *formalista* filozófiáját, amely (nem egészen jogosan) Hilbert nézeteire is hivatkozik. Péter Rózsa felfogása szerint a matematikában a fogalmak *jelentése* a domináló, minden más – axiómatizálás, formalizmus – csak segédeszköz. Meggyőződése szerint minden matematikai fogalomnak megvan a maga jelentése, még akkor is, ha ez kezdetben talán homályos és nem egészen egyértelmű, vagy ha éppen problematikus a jelentés szabatos megfogalmazása (mint pl. az effektív kiszámíthatóság esetében). Számára a kontinuumprobléma nem lett értelmetlenné Gödel és P. Cohen idevágó eredményeinek ismerete után sem.[11] Matematikafilozófiája alapján utasítja el Church azon hipozétisét is, amely szerint az effektíve kiszámítható számelméleti függvények osztálya azonos az általános rekurzív függvények osztályával. Nézete szerint az effektív kiszámíthatóság azon fogalmak körébe tartozik, melyek terjedelme a matematika fejlődése során

[10] L. Kalmár: On unsolvable mathematical problems. *Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy*, Amsterdam 1948, Vol. I, 534—536.

[11] E témáról lásd pl. Hajnal András, A kontinuum-problémára és a kiválasztási axiómára vonatkozó axiomatikus vizsgálatok történetéről és jelenlegi állásáról, *Mat. Lapok 17* (1966), 253—260; továbbá a [34] cikk Utószavát.

növekedő, és sohasem tekinthető teljesen befejezettnek, lezártnak. E nézetét támogatja egy Kalmár Lászlótól származó matematikai eredmény is.[12]

Péter Rózsa kutatásainak új szakaszát jelenti a rekurzív függvény fogalmának általánosítása a természetes számok halmazáról bizonyos általánosabb, „számszerűen fölépíthető" halmazokra. Láttuk, hogy a rekurzív függvények bevezetése azon tényre épül, hogy a természetes számok halmaza egy „kezdő elemből" (a nulla) kiindulva, egyetlen „alapfüggvény" (az n') segítségével teljesen „bejárható". Egynél több kezdőelemet és/vagy egynél több alapfüggvényt (melyek között többváltozós is lehet) föltételezve, nyerjük a „számszerűen felépíthető halmaz", ill., a Péter Rózsától származó kifejezéssel, a *szabad holomorf halmaz* fogalmát. (A pontos definíciót itt elhagyjuk.) Ilyen halmazra egyszerű, de az alkalmazások szempontjából igen fontos példa: egy véges abc betűiből felépíthető „szavak" – azaz: véges hosszúságú jelsorozatok – halmaza. Kezdő elemként (azaz a 0 megfelelőjeként) egyedül az üres szót vesszük (mint az abc betűiből felépíthető egyetlen „nulla tagú" sorozatot). Alapfüggvények (vagyis n' megfelelői) lesznek azok a függvények, amelyek minden szót meghosszabbítanak egy-egy betűvel; így az alapfüggvények száma azonos az abc betűinek számával. Mivel az üres szóból kiindulva bármely szó megkapható egybetűs meghosszabbítások végesszámú sorozatával, világos, hogy a szóhalmaz az alapfüggvények segítségével éppúgy teljesen „bejárható", mint a természetes számok halmaza a 0-ból kiindulva az n' függvény segítségével. (Az általános esetben mind a kezdő elemek, mind az alapfüggvények halmaza lehet végtelen is.)

Ha egy szabad holomorf halmazon bizonyos követelményeket kielégítő parciális rendezés is adott (ekkor *rendezett* szabad holomorf halmazról beszélünk), úgy definiálhatók rajta a különféle rekurziófogalmak megfelelői, és a számelméleti rekurzív függvények elméletének túlnyomó része átvihető az ilyen halmazokra. Az idevágó eredményeket tárgyalja a [23] dolgozat. Míg más szerzők ezidőtájt a szóhalmazokon definiálható rekurzív függvényekre szorítkoztak, addig Péter Rózsa rendkívül általános megközelítésében a szóhalmazokra vonatkozó eredmények speciális esetként adódnak.

A rekurzív függvény fogalmának eme általánosítása széles körű alkalmazások felé tárt kaput. Ezek közül a fontosabbak: a programozási nyelvek elmélete, s ezen keresztül a modern számítástechnika, a matematikai nyelvészet, a formalizált nyelvek közötti fordítás, a logikai optimalizálás. Péter Rózsa 1960 óta publikált munkái túlnyomó részben a rekurzív függvények általánosított elméletének alkalmazási problémáival érintkeznek.

Ezen eredményei nagyobb részét foglalja össze 1976-ban, fél évvel halála előtt megjelent könyve (lásd [52]). A monográfia a rekurzív függvények programozáselméleti alkalmazásaival foglalkozik. Fontosabb eredményei a következők. Bizonyítja, hogy egy pontosan definiált „ideális számítógéppel" (amely a reális komputerek matematikai idealizációja) kiszámítható függvények osztálya azonos a parciális rekurzív függvények osztályával. Igazolja, hogy a fordítóprogramok elméletében fontos szerepet játszó „veremmemória" módszer parciális rekurzív. A gépi programok előkészítésében nagy szerepet játszó blokkdiagramok szabatos matematikai megfelelőjeként bevezeti a gráfsémával való kiszámíthatóság fogalmát, s bebizonyítja, hogy e kiszámíthatóság-fogalom egybeesik a parciális rekurzivitás fogalmával. Kimutatja, hogy az „ALGOL 60" programozási nyelvből a rekurzív eljárások elvileg kiküszöbölhetők, továbbá hogy e nyelv leírására használt metanyelv primitív re-

[12] Lásd erről [52], 147. old.

kurzív. Bizonyítja az „ALGOL 68” nyelv definíciójában alkalmazott kétlépcsős grammatika fogalmainak rekurzivitását is.

A könyv megjelenése óta eltelt rövid idő ellenére máris mutatkoznak a nemzetközi érdeklődés jelei; alig kockázatos azt jósolni, hogy e műnek a szerző első könyvéhez hasonló sikere lesz. Ennek egyik biztosítéka az az előadói művészet, mely e könyvben éppúgy magával ragadja az olvasót, mint a szerző minden korábbi írásában. Mint Péter Rózsa első monográfiája, e kötet is túlnyomórészt a szerző saját eredményeit mutatja be, mintegy lezárva életművét.

A matematika pedagógusa

Péter Rózsa mintegy húsz éven át tanított matematikát középiskolában (rövidebb kényszerű megszakításokkal). Hogy matematikaórái nem voltak tradicionálisak, arról néhány akaratlan beszámolót találhatunk „Játék a végtelennel” c. könyvének számos helyén. Ezekből kiderül, hogy Péter Rózsa már akkor vállalta azt a „kalandot”, hogy a matematika *megtanítása* helyett a matematika *közös felfedezésére* (a pedagógus és a tanítványok együttes munkájára) invitálja tanítványait; s örömmel regisztrálhatta, hogy a közös felfedező munka nemcsak a tanítványoknak nyújt maradandó élményt és szilárd ismeretet, hanem a tapasztalt vezetőnek, a pedagógusnak is nemegyszer új, váratlan és meglepő oldaláról mutatja meg a már jólismert tárgyat. Nyilvánvaló, hogy ebben a hosszú tanítási praxisban alakultak ki a matematikai ismeretterjesztésre és tanításra vonatkozó alapeszméi, amelyek kisugárzására a felszabadulás után nyílt lehetősége.

Péter Rózsa számára a matematika integráns része az emberalkotta szépség, a kultúra világának. Ez az esztétikai principium készteti a „két kultúra” elvének elutasítására. A maga részéről egész életében érdeklődött a tradicionális értelemben vett humán kultúra problémái iránt (erről tanúskodnak, egyebek között, rendszeresen publikált filmkritikái). És fontosnak tartotta, hogy a „humánum emberei” megismerjék a matematika szépségeit is. Ez vezette arra, hogy író ismerőséhez, Benedek Marcellhez írott levelekben képet nyújtson a matematikáról. A levelekből keletkezett a már többször említett könyve, a „Játék a végtelennel”, amely mesteri példája annak, hogy hogyan lehet „kívülállóknak” bemutatni a matematika szépségeit. A „két kultúra” közötti gát lebontására irányuló törekvés jegyében fogantak még [VII] és [VIII] írásai is.

A felszabadulás utáni években minden erejét a hazai matematikatanítás ügyének fellendítésére fordítja, s a megoldandó sürgős feladatok érdekében átmenetileg még tudományos kutató munkáját is háttérbe szorítja. Aktívan részt vesz az iskolák demokratizálásáért folyó munkában. A Köznevelési Tanács tantervkészítő bizottságában ő készíti a különféle iskolatípusok új szellemű matematikai tantervét. Tankönyvpályázatokat és tanterveket bírál. Az ifjúsági szervezetekben, a fővárosi népművelés keretében és a rádióiskolán szakköröket vezet és előadásokat tart, tanítást vállal a dolgozók gimnáziumában és a tanítók nyári szakosító tanfolyamán, cikkeket ír napi- és hetilapokban. „A tanító matematikakönyve” c. pályázatával (1946) elnyeri a Magyar Tudományos Akadémia első díját. Részt vesz az újszellemű matematika tankönyvek írásában (lásd [IV]). Önkéntes társadalmi munkában bekapcsolódik a budapesti tudományegyetemen a matematika szakos tanárképzés munkájába: a hallgatók gyakorló tanításait látogatja és segíti.

Ekkoriban már az egyetemre is hívják tanítani. És bár elvállalja egyetemi órák tartását is, a matematika tanítása és népszerűsítése marad szívügye, s ezért nem az egyetemen, hanem az 1947-ben létrehozott budapesti pedagógiai főiskolán vállal végleges állást. Mikor a főiskolán önálló tanszéket kap a matematika, őt bízzák meg a tanszék vezetésével. Itt tanít a főiskola megszűntéig, 1955-ig.

A főiskola megszűnte után az Eötvös Loránd Tudományegyetem professzorának nevezik ki. Nyugdíjba vonulásáig (1975) tanítja itt „a matematika alapjai" c. tárgyat. Egyetemi órái nemcsak szakmailag, hanem didaktikailag is rendkívül értékesek voltak a leendő tanárok számára. Mint az egyetem Tanárképző Tanácsának matematikai szakfelügyelői csoportjának vezetője, aktívan részt vett a tanárjelöltek nevelésében és a gyakorló iskolák színvonalának emelésére irányuló munkában, egyebek között a gyakorló iskolák leendő vezető matematikatanárainak kiválasztásában is. Nem rajta múlt, hogy később e munkát abba kellett hagynia.

Szakmai szemináriumaival (amelyeket Surányi János egyetemi tanárral közösen irányított) leendő matematikusok nemzedékeinek neveléséhez járult hozzá. E szemináriumok bizonyos fajta „posztgraduális" képzést is pótoltak a matematika alapjai témakörből; számos fiatal kutató itt mutathatta be első eredményeit.

Egyetemi oktató munkáját nyugdíjbavonulása napjáig rendkívül komolyan vette, noha korára és betegségére tekintettel lényeges kedvezményeket vehetett volna igénybe. 1974-ben, amikor súlyos műtét előtt állt, ennek időpontját úgy egyeztette orvosával, hogy oktató munkájában ne okozzon fennakadást.

Rendkívüli energiával kapcsolódott be a folyamatban levő oktatási reform munkálataiba. 1973-tól haláláig tagja és aktív résztvevője volt a MTA Elnökségi Közoktatási Bizottsága Matematikai Albizottságának, ill. az ennek utódaként létrehívott MTA—OM Köznevelési Bizottság Matematikai Munkabizottságának. Ugyancsak aktív munkása volt a Bolyai János Matematikai Társulat irányította középiskolai matematikatanítási kísérleteknek, amelyek 1973-ban kezdődtek. E kísérletek elvi-tartalmi irányítása az ő kezében összpontosult. Az elkészült feladatlapokat, munkafüzeteket, könyvrészleteket ténylegesen éjt nappallá tevő munkával lektorálta. Tanácsokat adott a szervezőknek és a tanároknak, harcolt a bürokratikus akadályok elhárításáért, szenvedélyesen érvelt a meggyőződése szerint helyes didaktikai elvekért. Élete utolsó két esztendejében, súlyos betegségével küzdve, ez a munka adott értelmet életének.

Péter Rózsa kiemelkedő munkát végzett Társulatunkban mint tiszteletbeli elnök, és különösen mint az *Emlékőrző Bizottság* elnöke. Túlnyomórészt az ő munkájának köszönhető, hogy világhírű matematikusaink, Fejér Lipót és Riesz Frigyes emlékét utcanevek őrzik fővárosunkban. Iskolai szakköröket mozgósított elhunyt nagyjaink sírjának felkutatására és ápolására. Kezdeményezésére alapította társulatunk a Szele Tibor emlékérmet és a Rényi Kató emlékdíjat. Megvalósulatlan maradt az az álma, hogy a Budapesti Műszaki Egyetemet König Gyuláról, egykori rektoráról, a világhírű matematikusról nevezzék el.

Mint hivatásához méltó matematikust és igaz pedagógust az igazság szenvedélyes szeretete jellemezte. Elutasított mindennemű megalkuvást, képtelen volt bármiféle kompromisszumra, s másoktól éppúgy elvárta az egyenes és egyértelmű magatartást és kiállást, ahogyan saját lényéből fakadt a helyesnek vélt út tántoríthatatlan követése. Megvetette a nagyképűséget, a hamis méltóságot. Kedvelte az okos humort, a szavakkal való művészi játékot, de gyűlölte az adott szóval űzött játékot. Tanítványaiban és munkatársaiban nagyrabecsülte az embert, osztozott személyes gondjaikban, segített problémáikban, bátran és önzetlenül kiállt azokért, akiket támogatására méltónak érzett.

Matematikai és pedagógiai munkásságában továbbra is közöttünk él. Emlékét — munkatársai és barátai körén túl — különös szeretettel és tisztelettel őrzik mindazok, akik tanítványaiként mérhetetlenül sokat köszönhetnek neki.

PÉTER RÓZSA MUNKÁI

1. Tudományos munkák

[1] Rekursive Funktionen. *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses,* Zürich, 1932, 2. kötet, 336—337.

[2] Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion. *Math. Annalen 110* (1934), 613—632.

[3] Konstruktion nichtrekursiver Funktionen. *Math. Annalen 111* (1935), 42—60.

[4] A rekurzív függvények elméletéhez. *Mat. és Fiz. Lapok 42* (1935), 25—49.

[5] Über die mehrfache Rekursion. *Math. Annalen 113* (1936), 489—527.

[6] Über rekursive Funktionen der zweiten Stufe. *Comptes rendus du Congres International des Mathématiciens,* Oslo, 1936, 2. kötet, 267.

[7] Contribution to recursive number theory. *Acta Sci. Math. Szeged 9* (1940), 233—238.

[8] Az axiomatikus módszer korlátai. *Mat. és Fiz. Lapok 48* (1941), 120—143.

[9] Zum Begriff der rekursiven reellen Zahl. *Acta Sci. Math. Szeged 12* (1950), 239—245.

[10] Transzfinit rekurziók (A matematika alapjai és a rekurzív függvények). *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei,* 1950 (megjelent 1952-ben), 419—428.

[11] Zusammenhang der mehrfachen und transfiniten Rekursionen. *The Journal of Symbolic Logic 15* (1950), 248—272.

[12] *Rekursive Funktionen.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951. 2. bővített kiadása: 1957.
oroszul: *Rekurszivnüe Funkcii,* Izdat. Inosztrannoj Literaturü, Moszkva, 1954.
kínaiul: Peking, 1958.
angolul: *Recursive Functions,* Third revised edition, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967.

[13] Probleme der Hilbertschen Theorie der höheren Stufen von rekursiven Funktionen. *Acta Math. Acad. Hung. 2* (1951), 247—274.

[14] Rekursive Definitionen, wobei frühere Funktionswerte von variablen Anzahl verwendet werden. *Publ. Math. Debrecen 3* (1953), 33—70.

[15] Rekurzív definíciók, amelyek változó számú korábbi függvényértéket használnak fel. *Mat. Lapok 5* (1954), 7—9.

[16] Újabb bizonyítás arra, hogy a Csillag—Kalmár-féle elemi függvények osztálya szűkebb, mint a primitív-rekurzív függvényeké. *Mat. Lapok 5* (1954), 244—252.

[17] Ein neuer Beweis für die Tatsache, dass die Klasse der primitív rekursiven Funktionen umfassender, als die Klasse der elementaren Funktionen ist. *Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Math. 1* (1955), 29—36.

[18] Die Beschränkt-rekursiven Funktionen und die Ackermannsche Majorisierungsmethode. *Publ. Math. Debrecen 4* (1956), 362—375.

[19] A Grzegorczyk-féle korlátozottan rekurzív függvények és az Ackermann-féle majorizációs módszer. *Mat. Lapok 8* (1957), 93—99.

[20] Rekursivität und Konstruktivität. *Constructivity in Mathematics,* Amsterdam, 1958, 226—233.

[21] Graphschemata und rekursive Funktionen. *Dialectica 12* (1958), 373—393.

[22] Über die Partiell-Rekursivität der durch Graphschemata definierten zahlentheoretischen Funktionen. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. 2* (1959), 41—48.

[23] Über die Verallgemeinerung der Rekursionsbegriffe für abstrakte Mengen als Definitionsbereiche. *Infinitistic Methods* (Proceedings of the Colloquium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 2—9 September 1959), Warszawa, 1961, 329—335.

[24] Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche, I—II. *Acta Math. Acad. Hung. 12* (1961), 271—314, *13* (1962), 1—24.

[25] Primitiv-rekursive Wortbeziehungen in der Programmierungssprache „ALGOL 60" *MTA Mat. Kut. Int. Közl. 6/A* (1961), 137—144.

[26] Zu einem Rekursionsschema von Hu Shih-Hua. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. 3—4* (1960—61), 227—232.

[27] A Hu Shih-Hua-féle lánctörtszerű rekurzió és a Hilbert-féle II. osztály. *Mat. Lapok 11* (1961), 275—279.

[28] Über die Rekursivität einiger Übersetzungs-Transformationen, I. Mitteilung. *MTA Mat. Kut. Int. Közl. 7/A* (1962), 69—78;
II. Mitteilung: Verwendung einer Linearisierungsweise des Kantorowitschschen Ausdrucks-Graphen. *Uo.* 373—384.

[29] Über die „kürzeste" Form von Booleschen Funktionen. *MTA Mat. Kut. Int. Közl. 7/A* (1962), 79—93.

[30] Über die Rekursivität der Begriffe der mathematischen Grammatiken. *MTA Mat. Kut. Int. Közl. 8/A* (1963), 213—228.

[31] Über die Primitiv-Rekursivität einiger den Aufbau von Formeln characterisierenden Wortfunktionen. *Acta Math. Acad. Hung.* *14* (1963), 149—172.
[32] Programmierung und partiell-rekursive Funktionen. *Acta Math. Acad. Hung.* *14* (1963), 373—401.
[33] Über die sequenzielle Berechenbarkeit von rekursiven Wortfunktionen durch Kellerspeicher. *Acta Math. Acad. Hung.* (1965), 231—253.
[34] A halmazelmélet axiómarendszerei. *Mat. Lapok 16* (1965), 185—227.
[35] Zum Beitrag von F. Schwenkel „Rekursive Wortfunktionen über unendlichen Alphabeten". *Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Math.* *11* (1965), 377—378.
[36] Metod linearizacii grafov Kantorovicsa i nyekatorüje jevo primenyenyija. In: *Teorija konyecsnüh i verojatnosztnüh avtomatov*. Izd. Nauka, Moszkva, 1965.
[37] Zur Ausschaltbarkeit der rekursiven und simultanen Proceduren der algorithmischen Sprache ALGOL 60. *Studia Sci. Math. Hung.* *1* (1966), 309—314.
[38] Zur zweistufigen Satzstruktur-Grammatik, I. *Studia Sci. Math. Hung.* *2* (1967), 455—456.
[39] Zur zweistufigen Satzstruktur-Grammatik, II. *Studia Sci. Math. Hung.* *3* (1968), 181—194.
[40] Bemerkung zu den Révészschen terminalen Grammatiken. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sectio Math.* *11* (1968), 109—113.
[41] On the linearisation of expression graphs due to Kantorovitch. *Theory of Graphs*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, 259—263.
[42] Über zweistufig definierte Sprachen. *Les fonctions recursives et leurs applications* (Coll. Int. Tihany, Hongrie, 4—7 Septembre 1967). Publié par l'Institut Blaise Pascal et l'Association Mathematique Bolyai János, 1969, 12—23.
[43] Über die Pairschen freien Binoiden als Spezialfälle der angeordneten freien holomorphen Mengen. *Bull. de l'Acad. Polon. Sci.* *17* (1969), 181—184.
[44] Automatische Programmierung zur Berechnung der partiell-rekursiven Funktionen. *Studia Sci. Math. Hung.* *4* (1969), 447—463.
[45] Die Pairschen freien Binoiden als Spezialfälle der angeordneten freien holomorphen Mengen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* *21* (1970), 297—313.
[46] Die prinzipielle Ausschaltbarkeit der rekursiven Prozeduren aus der Programmierungssprache ALGOL 60. *Acta Cybernetica 1* (1972), 219—231.
[47] Zur Frage Rekursivität der im „ALGOL 68" verwendeten zweistufigen Grammatik. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sectio Math.* *15* (1972), 89—101.
[48] Veranschaulichung einer sequenziellen Berechnung der rekursiven Funktionen durch „eisenbahnrangierende Graphen". *Periodica Math. Hung.* *3* (1973), 183—187.
[49] Mathematische Fassung der sogenannten „Entscheidungs-Tabellen". *Acta Cybernetica 2* (1973), 89—108.
[50] Zur Rekursivität der mathematischen Grammatiken. *Computational Linguistics 9* (1973), 193—216.
[51] Die Rekursivität der Programmierungssprache „LISP 1.5" in Spezialfällen der angeordneten freien holomorphen Mengen. *Acta Cybernetica 3* (1975), 183—201.
[52] *Rekursive Funktionen in der Komputer-Theorie*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.

Továbbá:

számos dolgozat recenziója a *The Journal of Symbolic Logic* c. folyóiratban.

2. Egyéb munkák

[I] *Játék a végtelennel.* Dante Könyvkiadó, Budapest, 1945.
2. kiadás: Bibliotheca, Budapest, 1957.
3. kiadás: Gondolat Kiadó, Budapest, 1963.
4. kiadás: Tankönyvkiadó, 1969.
5. kiadás: Tankönyvkiadó, 1974.
Németül: *Das Spiel mit dem Unendlichen.* G. B. Teubner, Leipzig—Berlin, 1955. 2. és 3. kiadás: 1957.
Angolul: *Playing with Infinity*. G. Bell and Sons Ltd., London, 1961. Ua.: Simon and Schuster, New York, 1962.
Románul: *Jocul cu infinitul.* Editura Stiintifica, Bucuresti, 1959.
Szlovákul: *Hry s nekonečnom.* Osveta Martin, 1958.
Csehül: *Hra s nekonečnem.* Mlada Fronta, Praha, 1973.
Lengyelül: *Gra z Nieskończonoscia.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1962.
Oroszul: két szovjet kiadás: 1967, 1968.

Hollandul: 1966 (Uitgevery Het Spectrum N. V., Utrecht).
Svédül: *Lek med Oändligheten.* Ab Raben and Sjögren, Stockholm, 1964.
Olaszul: *Giocondo con l' infinito.* Feltrinelli, Milano, 1973.

[II] *A számok világa.* (Új Nevelés Könyvtára sorozat.) Budapest, 1948.

[III] Élet a számok világában. *Megváltozott világ,* Budapest, 1948 (függelék).

[IV] *Matematika* a gimnázium I. és II. osztálya számára (két kötet, Gallai Tiborral közösen). Budapest, 1949—50.

[V] Kalmár László matematikai munkássága. *Mat. Lapok 6* (1955), 138—150.

[VI] Die Mathematik ist schön. *Mathematik in der Schule 2* (1964).

[VII] A matematika szép. *Lányok évkönyve,* 1967.

[VIII] Formabontás a „két kultúra" ellen. *Magyar Tudomány,* 1969/4, 196—202.

[IX] A gyakorlati hasznosság ellen is vét, aki háttérbe akarja szorítani a tiszta matematikai kutatásokat. *Magyar Tudomány,* 1973/9, 592—595.

[X] Kalmár Lászlónkról. *Magyar Tudomány,* 1976/11.

Továbbá:

Pedagógiai és tudománynépszerűsítő cikkek napi- és hetilapokban, pedagógiai főiskolai jegyzetek, Csillag Pál egy hátrahagyott dolgozatának sajtó alá rendezése; filmkritikák, stb.

В ПАМЯТЬ РОЖА ПЕТЕРА

ИМРЕ РУЖА—ЯНОШ УРБАН

IN MEMORIAM RÓZSA PÉTER

I. RUZSA AND J. URBÁN