MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

KIBERNETIKAI KUTATÓ CSOPORTJA

Matematikai osztály

Az M-3 utasitásrendszere alapján készitett szabványos és tipikus programok.

Sándor Ferenc
/Sándor Ferenc/
MTA KKCs tud. munkatársa

Dömölki Bálint
/Dömölki Bálint/
MTA KKCs tud.s.mtársa

Révész Pálné
/Révész Pálné/
MTA KKCs tud.s.mtársa

Szelezsán János
/Szelezsán János/
MTA KKCs tud.s.mtársa

Veidinger László
/Veidinger László/
MTA KKCs tud.s.mtársa

Gergely József
/Gergely József/
ösztöndijas gyak.

Lőcs Gyula
/Lőcs Gyula/
ösztöndijas gyak.

Budapest,1958. december 31.

Elfogadva: 1959.február 24.

Varga Sándor
/Varga Sándor/
igazgató

Tartalmaz: 230 oldal szöveget
Készült: 5 számozott példányban
.2. számu példány

Budapest
1958

Tartalomjegyzék.

I. fejezet.

Szubrutinok .

5

Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte: Szelezsán János

I.1. Elemi függvények szubrutinjai lebegőpontos ábrázolással.

Révész Pálné / Szelezsán János
G / Sz

Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte : Szelezsán János

I. 1. a. Az e^x függvény kiszámitásának szubrutinja lebegőpontos ábrázolással.

e^x-et a következő formulának megfelelően számitjuk ki:

$$e^x = 2^{[z]}\left(2^{\frac{\{z\}}{8}}\right)^8 \qquad z = x \log_2 e$$

ahol: $[z]$ a z-hez legközelebb eső egész számot jelöli;

$$[z] + \{z\} = z$$

$\{z\}$ ekkor eleget tesz a következő feltételeknek:

$$|\{z\}| \leqq 0{,}5.$$

Ezért a feladat leredukálódott e^u kiszámitására, ahol

$$u = \frac{\{z\} \ln 2}{8}, \qquad |u| \leqq \frac{\ln 2}{16} = \Theta$$

Az e^u Taylor sorában elég az első hat tagig elmenni, mert az R_5 maradék tag ebben az esetben nem haladja meg abszolut értékében a

$$e^{\Theta}\frac{\Theta^6}{6!} = 0{,}854 \cdot 10^{-11}$$ ~~$0{,}854 \cdot 10^{-11}$~~ értéket, azaz

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{120}u^5$$

Ennek a polinómnak a fokszámát még eggyel lehet csökkenteni, ha felhasználjuk a Csebisev polinómokat.

Ezért végezzük el az $u=\Theta v$ helyettesitést. Igy:

$$e^{u}=e^{\Theta v}=1+\Theta v+\frac{\Theta^2}{2}v^2+\frac{\Theta^3}{6}v^3+\frac{\Theta^4}{24}v^4+\frac{\Theta^5}{120}v^5$$

Felirjuk az ötödfoku Csebisev polinómot a legmagasabb v hatvány együtthatójával megszorozva

$$\frac{\Theta^5}{120.16}\cos(5\arccos v)=\frac{\Theta^5}{120.16}\left(16v^5-20v^3+5v\right)$$

Ennek a polinómnak az eltérése 0-tól, nem haladja meg abszolut értékben a

$$\frac{\Theta^5}{120.16}\approx 0,795.10^{-10}$$ értéket.

Ezért

$$\frac{\Theta^5}{120}v^5\approx\frac{20\Theta^5}{120.16}v^3-\frac{5\Theta^5}{120.16}v$$

Ilymódon

$$e^{u}\approx 1+\left(\Theta-\frac{5\Theta^5}{120.16}\right)v+\frac{\Theta^2}{2}v^2+\left(\frac{\Theta^3}{6}+\frac{20\Theta^5}{120.16}\right)v^3+\frac{\Theta^4}{24}v^4=$$

$$=1+\left(1-\frac{5\Theta^4}{120.16}\right)u+\frac{u^2}{2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{20\Theta^2}{120.16}\right)u^3+\frac{u^4}{24}$$

Ha $v=2t$-t helyettesitünk, ahol $t=\{z\}$, akkor $2^{\frac{\{z\}}{8}}$ kiszámitására t-ben egy polinómot kapunk, most már a következő végleges formában:

$$2^{\frac{\{z\}}{8}}=c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+c_4t^4\qquad t=\{z\}$$

ahol $c_0 = 1$

$c_1=2\left(\Theta-\frac{5\Theta^5}{120.16}\right) = 0,86643396773.10^{-1}$

$c_2=4\frac{\Theta^2}{2} = 0,37535391712.10^{-2}$

$c_3=8\left(\frac{\Theta^3}{6}+\frac{20\Theta^5}{120.16}\right) = 0,10841917811.10^{-3}$

$c_4=16\frac{\Theta^4}{24} = 0,23481760517.10^{-5}$

Igy $2^{\frac{t}{8}}$ kiszámításának a hibája nem haladja meg a $0{,}88.10^{-10}$ értéket.
Az 2^x relativ hibája az 5.10^{-10}-t éri el, ha x közel van 0,5-höz.
x-et normalizált lebegőpontos alakban helyezzük el a gépben, azaz $x=d.2^q$. Mivel q egész szám, tehát $q.2^{-30}$ van gyakorlatilag a gépben. A műveleteket lebegőpontos alakban végezzük el, tehát nem hivunk be szubrutint.

P r o g r a m

ooo1	×,	13	o15o	o152
ooo2	ПY	24	ooo3	o2o7
ooo3	+,	1o	o151	o153
ooo4	ПY	24	ooo5	o21o
ooo5	|-|,	51	o176	o2o7
ooo6	YП	34	o121	ooo7
ooo7	|-|,	51	o175	o2o7
oo1o	YП	34	oo11	oo14
oo11	:	o2	o175	o2o7
oo12	−	o1	o176	o21o
oo13	ПY	74	----	ooo7

$z = u \log_2 e$ kiszámítása és normalizálása

oo14	ПЧ	o5	o2o7	o177
oo15	ПЧ	o5	o21o	o2o4
oo16	YП	34	oo56	oo17
oo17	¬,	11	o21o	o154
oo2o	ПY	24	oo21	o2oo
oo21	YП	34	o122	oo22
oo22	−	o1	o176	o2oo
oo23	YП	34	oo26	oo24
oo24	×	o3	o175	o177
oo25	ПY	74	----	oo22
oo26	∧,	16	o176	o177
oo27	↓−,	31	o176	----
oo3o	YП	34	oo34	oo31
oo31	×	o3	o175	o177
oo32	+	oo	o176	o177
oo33	ПY	74	----	oo35
oo34	×	o3	o155	o177
oo35	ПЧ	o5	o157	o21o
oo36	|-|,	51	o155	o177

[z] kiszámítása

0037	УП	34	0040	0043	
0040	:	02	0155	0177	
0041	—	01	0156	0210	
0042	ПУ	74	----	0036	

0043	—,	11	0210	0204	
0044	УП	34	0045	0047	
0045	×	03	0175	0207	
0046	+	00	0176	0204	
0047	—,	11	0177	0207	{s} kiszámítása és
0050	ПУ	24	0051	0203	normalizálása
0051	|−|,	51	0175	0203	
0052	УП	34	0053	0060	
0053	:	02	0175	0203	
0054	—	01	0176	0204	
0055	ПУ	74	----	0051	

0056	ПЧ	05	0000	0177	
0057	ПЧ	05	0207	0203	
0060	ПЧ	05	0165	0205	
0061	ПЧ	05	0166	0206	
0062	×	03	0203	0205	
0063	+	00	0204	0206	
0064	|−|,	51	0175	0205	
0065	УП	34	0066	0071	
0066	:	02	0175	0205	
0067	—	01	0176	0206	
0070	ПУ	74	----	0064	
0071	ПЧ	05	0167	0201	
0072	ПЧ	05	0170	0202	
0073	—	01	0206	0202	
0074	×	03	0175	0205	
0075	+	00	0176	0206	$2^{\frac{\{z\}}{8}}$ képzése
0076	—	01	0176	0202	Horner elrendezéssel
0077	УП	34	0100	0074	
0100	+	00	0176	0202	
0101	УП	34	0102	0104	

o1o2	×	o3	o175	o2o1	
o1o3	ПУ	74	----	o1oo	
o1o4	+	oo	o2o1	o2o5	
o1o5	+	oo	o147	oo65	
o1o6	ПУ	74	----	oo64	
o1o7	+	oo	o16o	oo71	
o11o	+	oo	o16o	oo72	
o111	−	o1	o147	oo65	
o112	−)	11	oo72	o152	
o113	УП	34	o114	oo62	

o114	ПЧ	o5	o162	o211	
o115	×	o3	o2o5	o2o5	
o116	+	oo	o2o6	o2o6	$\left(2^{\frac{\{z\}}{8}}\right)^8$ képzése
o117	−	o1	o176	o211	
o12o	УП	34	o125	o124	

o121	ПЧ	o5	oooo	o177	
o122	ПЧ	o5	o175	o2o5	
o123	ПЧ	o5	o176	o2o6	
o124	−)	11	o157	o21o	
o125	УП	34	o126	o131	
o126	×	o3	o175	o177	
o127	+	oo	o176	o216	
o13o	ПУ	74	----	o164	e^x képzése
o131	+	oo	o177	o2o6	
o132	+	oo	o146	oo65	
o133	ПУ	74	----	oo64	
o134	ПЧ	o5	o163	oo71	
o135	+	oo	o164	oo72	
o136	−	o1	o146	oo65	
o137		--	----	----	

Konstansok

/A zárójelekben mindig a felső szám jelzi az illető konstans mantisszáját, az alsó pedig a kitevőjét./

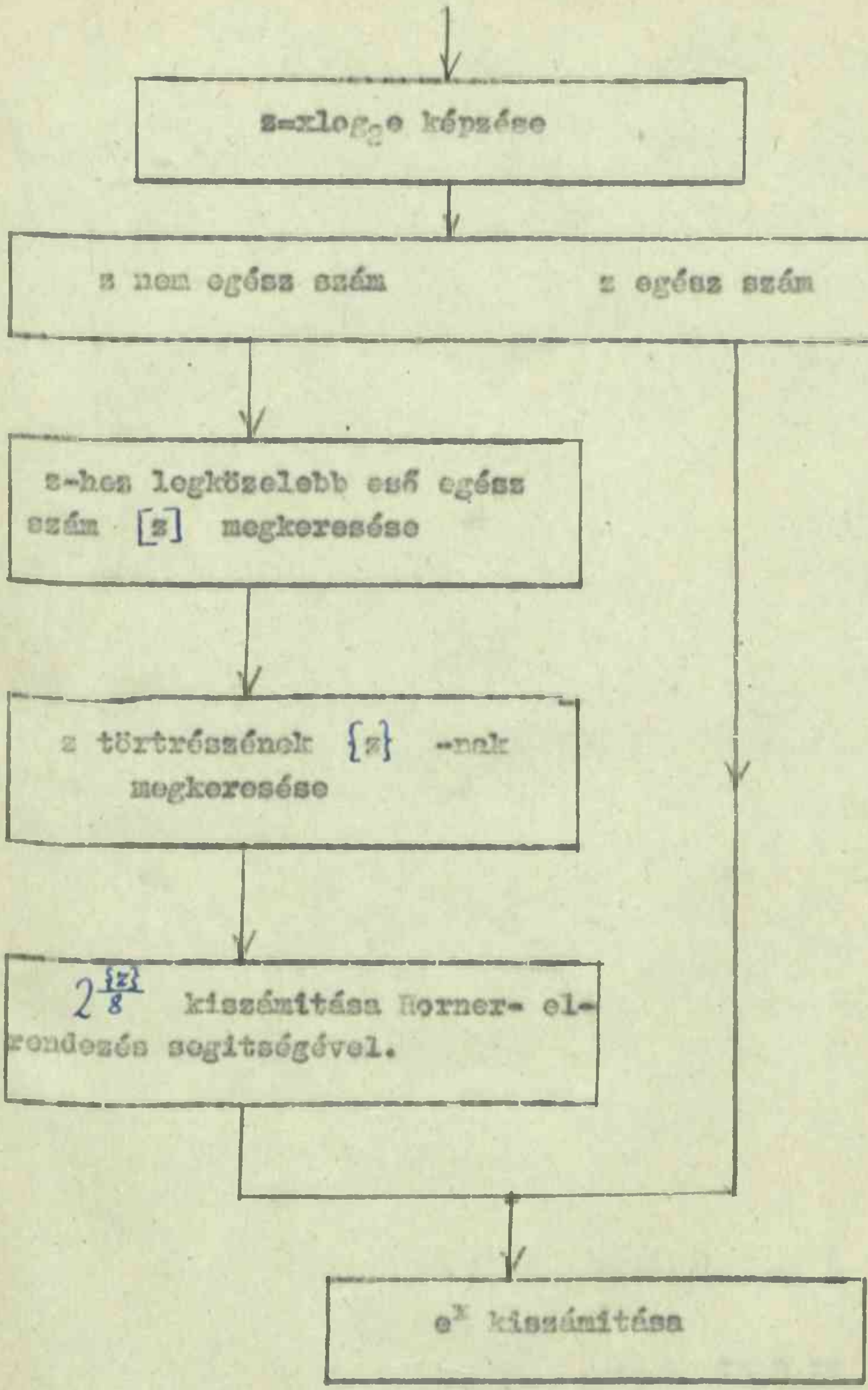
/o146/= 00 0000 0043
/o147/= 00 0000 0016
$\begin{pmatrix} o150 \\ o151 \end{pmatrix} = d.2^{q}$
$\begin{pmatrix} o152 \\ o153 \end{pmatrix} = \log_2 e$
/o154/= 29.2^{-30}
/o155/= 30.2^{-30}
/o160/= 00 0002 0000
/o161/= ПЧ o5 o176 o2o2
/o162/= 00 0000 0052
/o163/= ПЧ o5 o167 o2o1
/o164/= ПЧ o5 o17o o2o2
$\begin{pmatrix} o165 \\ o166 \end{pmatrix} = c_4$
$\begin{pmatrix} o167 \\ o170 \end{pmatrix} = c_3$
$\begin{pmatrix} o171 \\ o172 \end{pmatrix} = c_2$
$\begin{pmatrix} o173 \\ o174 \end{pmatrix} = c_1$
$\begin{pmatrix} o175 \\ o176 \end{pmatrix} = c_0 = 1$

Munkapozíciók

o177,o2oo,o2o1,o2o2,o2o3,o2o4,o2o5,o2o6,o2o7,o21o,o211

e^x a $\begin{pmatrix} o2o5 \\ o2o6 \end{pmatrix}$ pozicióban képződik

MENETREND.


z=xlog$_2$e képzése
z nem egész szám
z egész szám
z-hez legközelebb eső egész szám [z] megkeresése
z törtrészének {z} -nak megkeresése
$2^{\frac{\{z\}}{8}}$ kiszámitása Horner- elrendezés segitségével.
e^x kiszámitása

Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte: Szelezsán János

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK ELŐÁLLITÁSÁNAK SZUBRUTINJA LEBEGŐPONTOS ÁBRÁZOLÁSSAL.

A trigonometrikus függvények közül csak a $tg\,x$ és $cotg\,x$ lebegőpontos szubrutinjára van szükség. Ugyanis sin x és cos x abszolut értékben egynél kisebbek, argumentumuk pedig igen egyszerü transzromáció segitségével a $(0, \frac{\pi}{4})$ intervallumba hozható. Ezt a transzformációt mindenképpen el kell végezni, mivel sin x és cos x hatványsora ebben az intervallumban gyorsan konvergál. Ennélfogva sin x és vos x fixpontos szubrutin szerint előállitható.

Tg x és cotg x előállitása lebegőpontos szubrutinnal.

Minthogy $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $cotg\,x = \frac{1}{tg\,x}$ ezért ugy járunk el, hogy behivjuk sin x és vos x fixpontos szubrutinját, a kiszámitott sin x-et és cos x-et normalizáljuk és elvégezzük az osztásokat lebegőponttal. Ekkor megkapjuk tg x-et és cotg x-et lebegőpontos alakban.

PROGRAM:

0200	ПЧ	05	0262	0071	
0201	ПУ	74	-	0001	
0202	ПЧ	05	0114	0272	
0203	ПЧ	05	0000	0271	
0204	ПЧ	05	0000	0273	
0205	|-|,	51	0261	0272	
0206	УП	34	0242	0207	sin x és cos x
0207	|-|,	51	0260	0272	normalizálása
0210	УП	34	0211	0214	
0211	:	02	0260	0272	
0212	–	01	0261	0273	
0213	ПУ	74	-	0207	
0214	|-|,	51	0261	0270	
0215	УП	34	0246	0216	
0216	|-|,	51	0260	0270	
0217	УП	34	0220	0223	
0220	:	02	0260	0270	
0221	–	01	0261	0271	
0222	ПУ	74	-	0216	
0223	×	03	0260	0272	tg x kiszámitása
0224	+	00	0261	0273	és normalizálása
0225	:	02	0270	0272	
0226	–	01	0271	0273	→ tgx
0227	+	00	0263	0210	
0230	ПУ	74	-	0207	

0231	:,	12	0272	0264	
0232	ΠY	24	0233	0270	cotg x mantisszája
0233	—/	11	0273	0265	
0234	ΠY	24	0235	0271	cotg x kitevője
0235	+	00	0266	0217	
0236	ΠY	74	-	0214	cotg x kiszámitása
0237	—	01	0263	0210	és normalizálása.
0240	—	01	0266	0217	
0241	-	-	-	-	
0242	ΠЧ	05	0000	0272	Ha sin x = 0,
0243	ΠЧ	05	0267	0270	tg x = 0
0244	ΠY	24	0241	0271	cotg x = ∞
0245	ΠЧ	05	0000	0270	Ha cos x = 0
0246	ΠЧ	05	0267	0273	tg x = ∞
0247	ΠY	24	0241	0272	cotg x = 0

KONSTANSOK.

(0100) =	$X.2^{-15}$				
(0000) =		00	0000	0000	= 0
/0260/=		40	0000	0000	= $\frac{1}{2}$
/0261/ =		00	0000	0001	= 2^{-30}
/0262/ =	πY	24	0202	0270	
/0263/ =		00	0000	0015	
(0264 0265) =		(20 00	0000 0000	0000) 0002)	= 1 = $\frac{1}{4}$. 2^2 alakban
/0266/ =		00	0000	0014	
/0267/ =		77	7777	7777	

MUNKAPOZICIÓK.

0270, 0271, 0272, 0273

0001 sin x és cos x szubrutinjának kezdő poziciója

0071 sin x és cos x szubrutinjának vége.

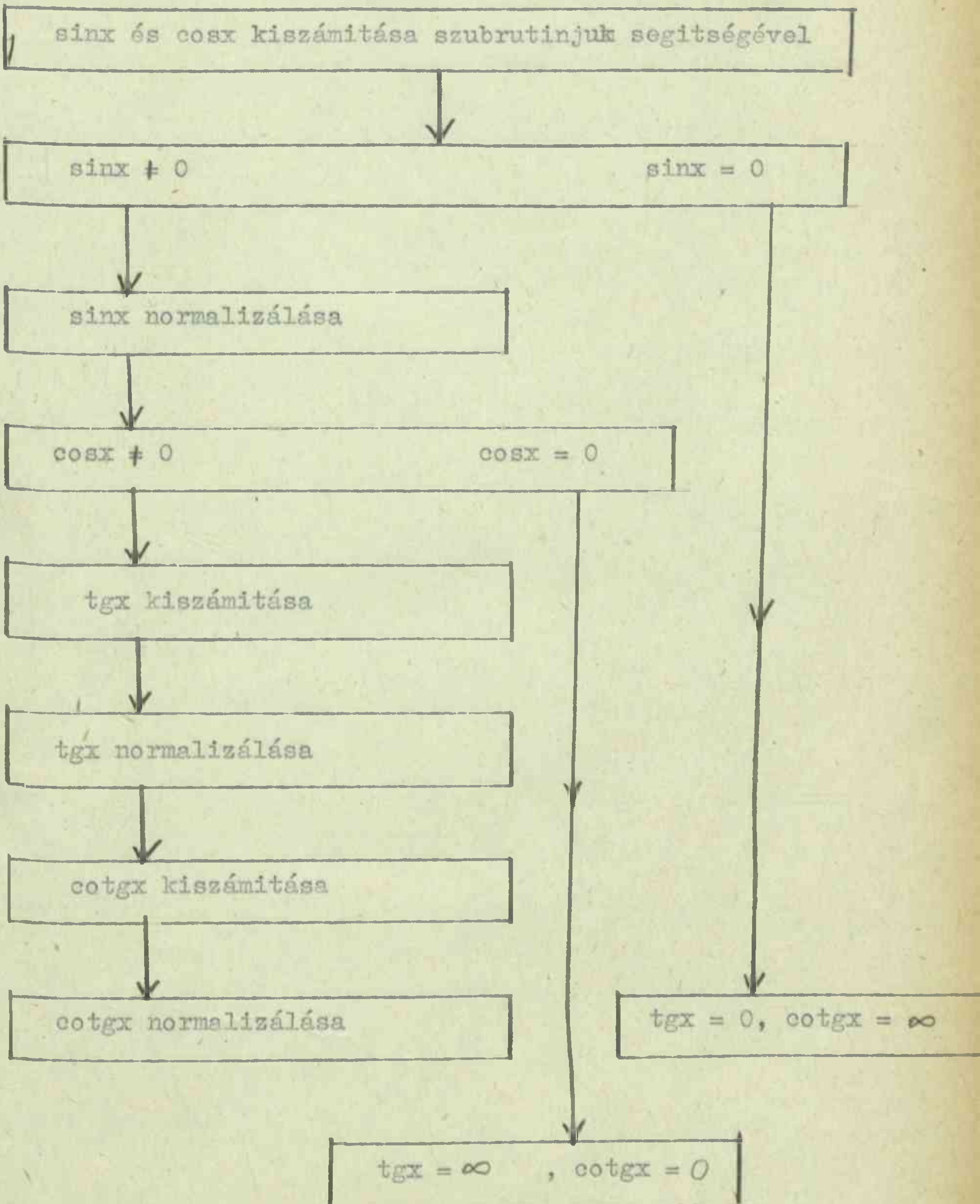
0114-ben nyerjük sin x-et

0113-ban " cos x-et.

(0270, 0271) -ben nyerjük cotg x-et

(0272, 0273) -ban " tg x-et.

M E N E T R E N D .


sinx és cosx kiszámitása szubrutinjuk segitségével
sinx ≠ 0
sinx = 0
sinx normalizálása
cosx ≠ 0
cosx = 0
tgx kiszámitása
tgx normalizálása
cotgx kiszámitása
cotgx normalizálása
tgx = 0, cotgx = ∞
tgx = ∞ , cotgx = 0

Révész Pálné, Szelezsán János

Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte: Szelezsán János

I.1.c. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZ FÜGGVÉNYEINEK KISZÁMITÁSA LEBEGŐPONTTAL.

A trigonometrikus függvények inverz függvényei közül csak arctg x és arc cotg x kiszámitására szoritkozunk, mivel arc sin x és arc cos x esetében az x argumentum mindig a $[-1, 1]$ intervallumba, arc sin x és arc cos x pedig a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba esik, tehát ha a számitást $\frac{1}{2}$ -es skálafaktorral végezzük el, akkor végrehajtható fixponttal is.

Arc tg x és arc cotg x kiszámitása lebegőponttal.

Ismeretes, hogy
$$\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\operatorname{arc\,cotg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
tehát ezeknek a függvényeknek a lebegőpontos kiszámitásánál nem teszünk egyebet, mint kiszámitjuk $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ -et, amely abszolut értékben mindig kisebb egynél és ezzel mint argumentummal behivjuk arc sin x és arc cos x szubrutinját. Az eredményt, - amely $\frac{1}{2}$ -es skálafaktorral megszorozva adódik, utólag normalizáljuk.

PROGRAM.

0001	x;	13	0110	0110	
0002	ПУ	24	0003	0130	
0003	:;	12	0114	0111	
0004	ПУ	24	0005	0131	
0005	|-|;	51	0130	0000	x^2 képzése
0006	УП	34	0007	0073	
0007	|-|;	51	0114	0130	
0010	УП	34	0011	0014	
0011	:	02	0114	0130	
0012	—	01	0115	0131	
0013	ПУ	74	-	0007	
0014	ПЧ	05	0114	0132	
0015	ПЧ	05	0115	0133	
0016	→	01	0131	0133	
0017	×	03	0114	0130	
0020	+	00	0115	0131	
0021	—	01	0115	0133	
0022	УП	34	0023	0017	$1+x^2$
0023	+	00	0115	0133	
0024	УП	34	0025	0027	
0025	×	03	0114	0132	
0026	ПУ	74	-	0023	
0027	+	00	0132	0130	
0030	+	00	0116	0010	
0031	ПУ	74	-	0007	

0032	ПЧ	05	0130	2+0100	
0033	ПЧ	05	0117	2+0101	
0034	ПЧ	05	0120	2+0047	
0035	ПУ	74	-	2+0001	
0036	∧,	16	0131	0115	$\sqrt{1+x^2}$
0037	↓−,	31	0115	-	
0040	УП	34	0043	0041	
0041	×	03	0114	0130	
0042	+	00	0115	0131	
0043	×	03	0114	0131	
0044	+	00	0121	0010	
0045	ПУ	74	-	0007	

0046	×,	13	0110	0114	
0047	↓:	22	0130	γ	
0050	+,	10	0115	0111	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
0051	↓−	21	0131	0131	
0052	+	00	0122	0010	
0053	ПЧ	05	0112	arc sin vége	
0054	ПУ	74	-	0007	

0055	×	03	0114	γ	
0056	+	00	0115	0131	
0057	УП	34	0055	arcsin	
0060	ПЧ	05	δ	0130	
0061	ПЧ	05	δ+1	0132	
0062	+	00	0123	0010	
0063	ПЧ	05	0115	0131	

0064	ПУ	74	0007	0133
0065	|-|,	51	0114	0132
0066	УП	34	0067	0072
0067	:	02	0114	0132
0070	—	01	0115	0133
0071	ПУ	74	-	0065
0072	ПЧ	05	0113	0010

arctg x és
arcctg x

- -

0073

Konstansok.

$\begin{pmatrix} 0110 \\ 0111 \end{pmatrix} = x = d.2^q$

/0123/ =		00	0000	0007
/0114/ =	$\frac{1}{2}$ =	40	0000	0000
/0115/ =	2^{-30} =	00	0000	0001
/0116/ =		00	0000	0016
/0117/ =	2.2^{-30} =	00	0000	0002
/0120/ =	$\pi\gamma$	24	0036	0130
/0121/ =		00	0000	0014
/0122/ =		00	0000	0010
/0112/ =	$\pi\gamma$	74	-	0060
/0113/ =	$\gamma\pi$	34	0011	0014

Munkapoziciók.

0130, 0131, 0132, 0133

α + 0100 = az n-edik gyökvonó szubrutin argumentum helye,

α + 0101 = " " " -ban n helye

α + 0001 = " " " első utasitása

α + 0047 = " " " vége.

δ - banképződik arc sin x

δ+1 - ben " arc cos x

γ = arc sin x szubrutinjában az argumentum helye.

$\begin{pmatrix} 0130 \\ 0131 \end{pmatrix}$ -ben nyerjük arc tg x-et

$\begin{pmatrix} 0132 \\ 0133 \end{pmatrix}$ -ban " arc cotg x-et.

Révész Pálné
Szelezsány J.

Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte: Szelezsán János

24

I.1.d $y = \ln x$ fv. Kiszámitása lebegőpontos alakban.

Az x argumentumot lebegőpontos alakban vesszük fel, azaz

$x = d \cdot 2^p$ ahol $\frac{1}{2} \le d < 1$ ha $d \neq 0$ és

$-2^{30} < p < 2^{30}$, p mindig egész szám. Mivel

$\ln x = p \ln 2 + \ln d$ ezért elég az $\ln d$ kiszámitására szoritkozni

$\ln d$ Taylor sora: $\ln d = (d-1) - \frac{(d-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(d-1)^n}{n} + \dots$

Ez a sor az $[\frac{1}{2}, 1)$ intervallumban igen lassan konverg ezért d-re alkalmazunk egy transzformációt, amely átviszi egy olyan intervallumba, ahol a sor konvergenciája gyorsabb.

Igaz az, hogy $\ln d = \ln \lambda d - \ln \lambda$

Az $[\frac{1}{2}, 1)$ intervallumot felosztjuk bizonyos számu részre és minden részhez rendelünk egy olyan λ_i-t, amely az $[\frac{1}{2}, 1)$ intervallum megfelelő részét mindig ugyanabba az $[1, \lambda]$ intervallumba viszi át.

Legcélszerübbnek mutatkozik ezt az $[\frac{1}{2}, 1)$ intervallumot 4 részre osztani:

$[\frac{1}{2}, x_1), [x_1, x_2), [x_2, x_3),$ ~~$[x_3, x_4$~~ $[x_3, 1)$

Minden ilyen intervallumhoz hozzárendeljük a megfelelő $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ számot.

Ezek a λ_i és x_i értékek kielégitik a következő egyenletrendszert:

$\lambda_1 = 2$

$x_1 \lambda_1 = \lambda$

$x_1 \lambda_2 = 1$

$x_2 \lambda_2 = \lambda$

$x_2 \lambda_3 = 1$

$x_3 \lambda_3 = \lambda$

$x_3 \lambda_4 = 1$

$x_4 = \lambda$

Ahonnan következik, hogy

$\lambda_4 = \lambda, \quad \lambda_3 = \lambda^2, \quad \lambda_2 = \lambda^3, \quad \lambda_1 = \lambda^4 = 2$

Ily módon

$\lambda = \sqrt[4]{2}, \quad x_1 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$

Ilyen λ_i és x_i értékek mellett elég az $\ln y$ Taylor sorát csak 12 tagig venni, ahol $y = \lambda_i d$. Ekkor a hiba abszolut értékben kisebb marad mint $0{,}4 \cdot 10^{-10}$

A Csebisev polinomok segitségével ez a 12-ed foku polinom hatodfoku polinommá redukálható. Tehát $\ln x$ a következő képlet segitségével számitható ki:

$\ln x = \ln d \cdot 2^p = p \ln 2 - i \ln \lambda + a_6 y^6 + a_5 y^5 +$

$$+ a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0$$

ahol $y = \lambda^i d$, ha $d \in [x_{4-i}, x_{5-i})$

$x_0 = \frac{1}{2}$ és $x_4 = 1$

Ily módon számitva $\ln y$ hibája nem haladja meg a $0{,}8 . 10^{-10}$ értéket.

Ha bevezetjük a

$$\mu_i = \frac{i \ln \lambda - a_0}{\ln 2}$$

jelölést, akkor a következő végleges alakra jutunk:

$$\ln x = \ln d . 2^p - (p - \mu_i) \ln 2 + a_6 y^6 + a_5 y^5 +$$
$$+ a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

A polinómot a Horner-elrendezés segitségével számítjuk ki.

A konstansok értékei a következők:

μ_1 = 3,659646861	a_1 = 5,500472922
μ_2 = 3,909646861	a_2 = -6,299229808
μ_3 = 4,159646861	a_3 = 5,126738197
μ_4 = 4,409646861	a_4 = -2,638754306
	a_5 = 0,772171339
	a_6 = 0,098011235

Megjegyzés: a numerikus módszer megegyezik a "Sztrela" $\ln x$ szabványos szubrutinjánál alkalmazott eljárással.

PROGRAM.

0001	−)	11	0156	0124	Ha $x \leq 0$, a gép megáll
0002	УП	34	megállás	0003	
0003	ПЧ	05	0125	0177	p normalizált alakra hozatala
0004	ПЧ	05	0160	0200	
0005	|−|)	51	0156	0177	
0006	УП	34	0014	0007	
0007	|−|)	51	0157	0177	
0010	УП	34	0011	0014	
0011	:	02	0157	0177	
0012	−	01	0156	0200	
0013	ПУ	74	–	0007	
0014	ПЧ	05	0124	0175	$\lambda_i\, d$ képzése és normalizálása
0015	ПЧ	05	0000	0176	
0016	×	03	0152	0175	
0017	+	00	0153	0176	
0020	|−|)	51	0157	0175	
0021	УП	34	0022	0025	
0022	:	02	0157	0175	→ y
0023	−	01	0156	0175	
0024	ПУ	74	–	0020	
0025	−)	11	0156	0176	
0026	УП	34	0027	0032	
0027	+	00	0161	0032	
0030	+	00	0161	0033	
0031	ПУ	74	–	0016	
0032	ПЧ	05	0126	0201	
0033	ПЧ	05	0127	0202	

0034	—	01	0200	0202	
0035	×	03	0157	0177	
0036	+	00	0156	0200	
0037	—	01	0156	0202	
0040	УП	34	0041	0035	
0041	+	00	0156	0202	$p-\mu_i$ képzése
0042	УП	34	0043	0045	
0043	×	03	0157	0201	
0044	ПУ	74	-	0041	
0045	-	01	0201	0177	
0046	+	00	0162	0010	
0047	ПУ	74	-	0007	
0050	×	03	0154	0177	
0051	+	00	0155	0200	$(p-\mu_i)\ln 2$ képzése
0052	+	00	0165	0010	
0053	ПЧ	05	0136	0201	
0054	ПЧ	05	0137	0202	
0055	ПУ	74	-	0007	
0056	ПЧ	05	0136	0203	
0057	ПЧ	05	0137	0204	
0060	—	01	0202	0204	
0061	×	03	0157	0201	
0062	+	00	0156	0202	
0063	—	01	0156	0204	
0064	УП	34	0065	0061	
0065	+	00	0156	0204	
0066	УП	34	0067	0071	
0067	×	03	0157	0203	

0070	ΠY	74	-	0065	A hatodfoku polinom képzése Horner-elrendezéssel
0071	+	00	0203	0201	
0072	|-|,	51	0157	0201	
0073	YΠ	34	0074	0077	
0074	:	02	0157	0201	
0075	—	01	0156	0202	
0076	ΠY	74	-	0072	
0077	×	03	0175	0201	Itt keletkezik ln x
0100	+	00	0176	0202	
0101	+	00	0166	0073	
0102	ΠY	74	-	0072	
0103	—	01	0166	0073	ln x képzése
0104	+	00	0161	0056	
0105	+	00	0161	0057	
0106	—)	11	0056	0167	
0107	YΠ	34	0110	0056	
0110	Π4	05	0177	0203	
0111	Π4	05	0200	0204	
0112	+	00	0170	0073	
0113	ΠY	74	-	0060	
0114	Π4	05	0174	0010	Megváltozott utasitások visszaállitása.
0115	Π4	05	0171	0032	
0116	↓+	20	0172	0033	
0117	Π4	05	0173	0056	
0120	↓+	20	0172	0057	
0121	—	01	0170	0073	
0122	-	-	-	-	

KONSTANSOK.

$\begin{pmatrix}0124\\0125\end{pmatrix} = x = d.2^{p}$

$\begin{pmatrix}0126\\0127\end{pmatrix} = \mu_1 = 3{,}659646861$

$\begin{pmatrix}0130\\0131\end{pmatrix} = \mu_2 = 3{,}909646861$

$\begin{pmatrix}0132\\0133\end{pmatrix} = \mu_3 = 4{,}159646861$

$\begin{pmatrix}0134\\0135\end{pmatrix} = \mu_4 = 4{,}409646861$

$\begin{pmatrix}0136\\0137\end{pmatrix} = a_6 = -0{,}098011235$

$\begin{pmatrix}0140\\0141\end{pmatrix} = a_5 = 0{,}772171339$

$\begin{pmatrix}0142\\0143\end{pmatrix} = a_4 = -2{,}638754306$

$\begin{pmatrix}0144\\0145\end{pmatrix} = a_3 = 5{,}126736197$

$\begin{pmatrix}0146\\0147\end{pmatrix} = a_2 = -6{,}299229808$

$\begin{pmatrix}0150\\0151\end{pmatrix} = a_1 = 5{,}500472922$

$\begin{pmatrix}0152\\0153\end{pmatrix} = \lambda = \sqrt[4]{2}$

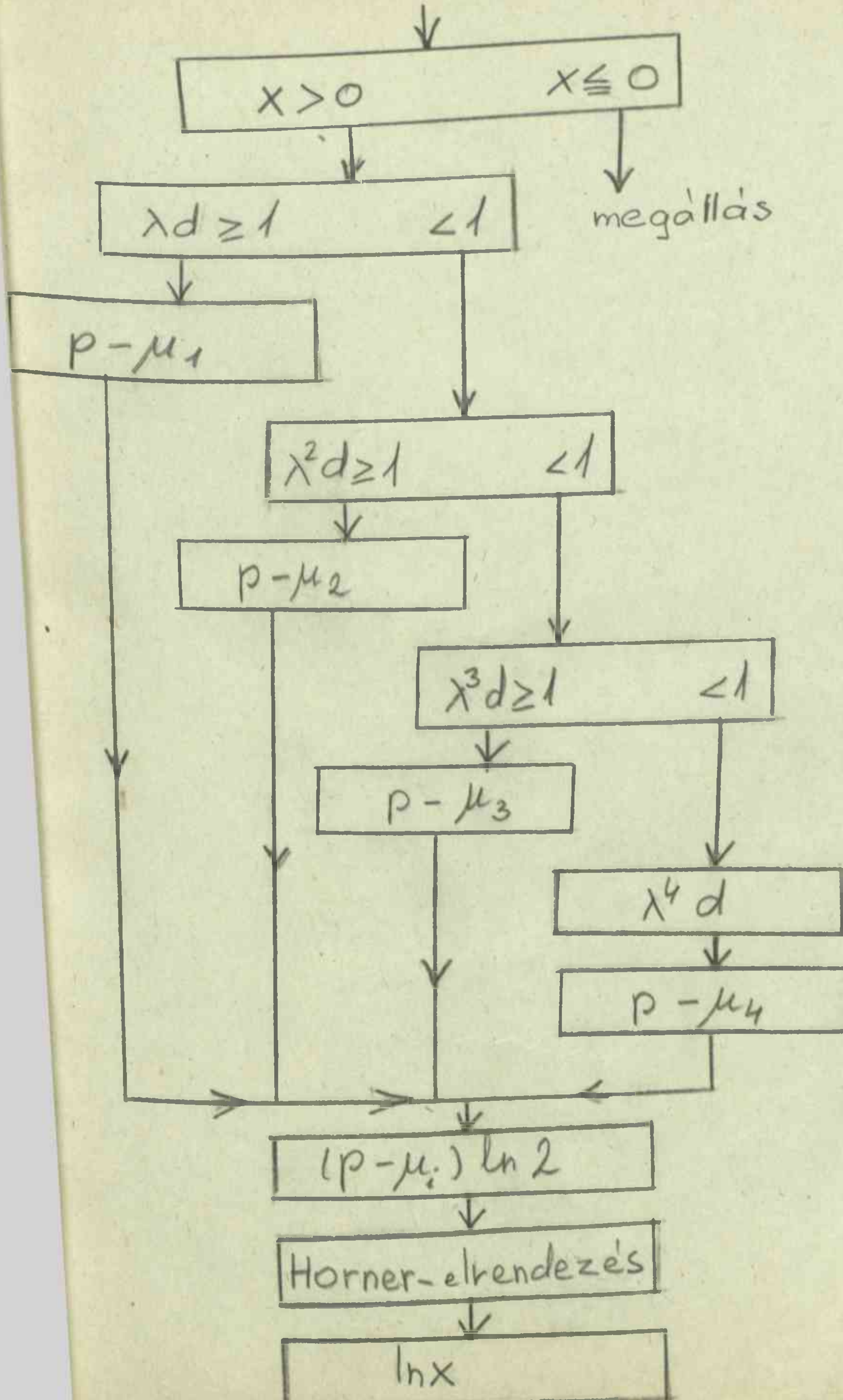
$\begin{pmatrix}0154\\0155\end{pmatrix} = \ln 2$

/0156/	=	00		0000	0001	= 2^{-30}
/0157/	=	40		0000	0000	= $\frac{1}{2}$
/0160/	=	$30 \cdot 2^{-30}$				
/0161/	=	00		0002	0000	
/0162/	=	00		0000	0034	
/0165/	=	00		0000	0027	
/0166/	=	00		0000	0004	
/0167/	=	05	Π4	0150	0203	
/0170/	=	00		0000	0015	
/0171/	=	05	Π4	0126	0201	
/0172/	=	00		0001	0001	
/0173/	=	05	Π4	0136	0203	
/0174/	=	34	YΠ	0011	0014	

MUNKAPOZICIÓK.

$\begin{pmatrix}0175\\0176\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0177\\0200\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0201\\0202\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0203\\0204\end{pmatrix}$

Menetrend



x > 0
x ≦ 0
λd ≥ 1
< 1
megállás
p − μ1
λ²d ≥ 1
< 1
p − μ2
λ³d ≥ 1
< 1
p − μ3
λ⁴ d
p − μ4
(p − μi) ln 2
Horner-elrendezés
ln x

1.2 Interpolálò szubrutinok.

Készítette: Szelozsán János

Ellenőrizte: Gergely József.

Legyen adva egy függvénytáblázat, amely tartalmazza egy $y=f/x/$ függvénynek egy adott $/a,b/$ intervallum bizonyos pontjaiban /alappontok/ felvett értékeit. Az intervallum más pontjaiban a függvényt interpolációs polinomok segítségével határozhatjuk meg.

Legyenek a szóbanforgó alappontok egyenlőközűek, s jelöljük h-val a $h=x_i-x_{i-1}$ lépésközt. Definiáljuk a szokásos módon az m-edrendű differenciát a

$$\Delta^m f_i = \Delta^{m-1} f_{i+1} - \Delta^{m-1} f_i \quad \text{képlettel,}$$

ahol: $f_i = f\,/x_i/$ s $x_i = a+ih.$

A szóbanforgó differenciák segítségével az interpolációs polinom az alábbi képletek valamelyikével határozható meg

$$N_1(x) = f_v + u\Delta f_v + \frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 f_v + \dots + \frac{u(u-1)\cdots(u-m+1)}{m!}\Delta^m f_v$$

$$N_2(x) = f_v + u\Delta f_v + \frac{u(u+1)}{2}\Delta^2 f_{v-2} + \dots + \frac{u(u+1)\cdots(u+m-1)}{m!}\Delta^m f_{v-m}$$

/Newton formulái./

$$S(x) = f_v + u\,\frac{\Delta f_v + \Delta f_{v-1}}{2} + \frac{u^2}{2}\Delta^2 f_{v-1} + \frac{u(u^2-1)}{3!}\,\frac{\Delta^3 f_{v-2} + \Delta^3 f_{v-1}}{2} +$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 f_{v-2} + \dots + \frac{u^2(u^2-1)\cdots[u^2-(m-1)^2]}{(2m)!}\Delta^{2m} f_{v-m}$$

/Stirling-formula./

$$B(x) = f_v + u\Delta f_v + u(u-1)\,\frac{\Delta^2 f_{v-1} + \Delta^2 f_v}{2} + \frac{u(u-1)(u-0{,}5)}{3!}\Delta^3 f_{v-1} +$$

$$+ \frac{u(u^2-1)(u-2)}{4!}\,\frac{\Delta^4 f_{v-2} + \Delta^4 f_{v-1}}{2} + \dots + \frac{(u-0{,}5)u\cdots(u-m)}{(2m+1)!}\Delta^{2m+1} f_{v-m}$$

/Bessel-formula./

Mindegyik képletben $u = \frac{x-x_v}{h}$, ahol x az a hely, ahol a függvényértéket keressük, $x_v = a + vh$ ezen hely előtt lévő alappont.

A Newton-polinomokat változó-paraméterként bevitt - differencia-fokszámmal programozzuk be: $m \leq 8$. A Stirling és Bessel-polinomoknál a negyedrendűnél magasabbrendű differenciákat nem vesszük figyelembe; feltesszük, hogy az interpolálandó függvények olyanok, hogy a magasabbrendű differenciák elhanyagolhatók.

Célszerű az interpoláció céljára a következő különbségtáblázatot összeállítani:

x_{v-2}	f_{v-2}					
		Δf_{v-2}				
x_{v-1}	f_{v-1}		$\Delta^2 f_{v-2}$			
		Δf_{v-1}		$\Delta^3 f_{v-2}$		
x_v	f_v		$\Delta^2 f_{v-1}$		$\Delta^4 f_{v-2}$	
		Δf_v		$\Delta^3 f_{v-1}$		$\Delta^5 f_{v-2}$
x_{v+1}	f_{v+1}		$\Delta^2 f_v$		$\Delta^4 f_{v-1}$	
		Δf_{v+1}		$\Delta^3 f_v$		
x_{v+2}	f_{v+2}		$\Delta^2 f_{v+1}$			
		Δf_{v+2}				
x_{v+3}	f_{v+3}					

A Newton formulákat akkor célszerű használni, ha x a táblázat elejéhez vagy a végéhez közel van; ellenkező esetben a Bessel vagy a Stirling formulát használjuk. Ha $|u| < 0,25$ akkor a Stirling formula, ha pedig $0,25 < u < 0,75$ akkor a Bessel formula a legalkalmasabb /Lásd: Bronstejn, Szemengyájev: Matematikai zsebkönyv 636-637 old./

A feladat programozása.

A szóbanforgó módszereket egy programba kapcsoljuk össze; az adott kritériumok alapján a gép választja ki a megfelelőt.
A program első részében megvizsgálja, hogy az adott x hely benne van-e a táblázatnak megfelelő értelmezési tartományban, s egyuttal megállapitja, hogy melyik két csomópont között van.

A ν számot a :

1./ $\nu 2^{-30} = \frac{x-a}{b-a}$ /n-1/ 2^{-30} képlet alapján számitjuk ki. /n az alappontok száma/.

Az 1./ képlet az:

$$\frac{x-a}{b-a} /n-1/\ 2^{-30} = \frac{\nu\frac{b-a}{n-1} + \delta}{b-a} /n-1/.2^{-30} =$$

$$= /n-1/.2^{-30} \left/ \frac{\nu}{n-1} + \frac{\delta}{b-a} \right/$$ egyenlőségből

az $/n-1/.2^{-30}.\ \frac{\delta}{b-a} < 2^{-30}$ egyenlőtlenség figyelembevételével adódott, ahol $\delta = x - x_\nu$.

Tehát, ha a táblázat első elemének memóriapoziciója t, akkor az $f/x_\nu/$ érték a $t+\nu$-edik pozicióban található.

A programozás szempontjából célszerű az adott képleteket a következő alakban irni:

$$N_1(u) = f_0 + u\Delta f_0 + u\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0 + u\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{u}{3}-\frac{2}{3}\right)\Delta^3 f_0 +$$
$$+ u\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{u}{3}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{u}{4}-\frac{3}{4}\right)\Delta^4 f_0 + u\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{u}{4}-\frac{3}{4}\right)\Delta^5 f_0 +$$
$$+ u\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{u}{6}-\frac{5}{6}\right)\Delta^6 f_0$$

$$N_2(x) = f_v + u\Delta f_{v-1} + u\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_{v-2} +$$

$$+ u\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{u}{3}+\frac{2}{3}\right)\Delta^3 f_{v-3} + \cdots +$$

$$+ u\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{u}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(\frac{u}{6}+\frac{5}{6}\right)\Delta^6 f_{v-6}$$

$$S(x) = f_v + u\,\frac{\Delta f_v + \Delta f_{v-1}}{2} + \frac{u^2}{2}\Delta^2 f_{v-1} + \frac{u}{6}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\Delta^3 f_{v-2} + \Delta^3 f_{v-1}\right)$$

$$+ \frac{1}{6}\,\frac{u^2}{2}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\Delta^4 f_{v-2}$$

$$B(x) = f_v + u\Delta f_v + \frac{u}{2}\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\Delta^2 f_{v-1} + \Delta^2 f_v\right) +$$

$$+ u\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{u-\frac{1}{2}}{3}\Delta^3 f_{v-1} + \frac{u}{4}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{u}{6}-\frac{1}{3}\right)\left(\Delta^4 f_{v-2} + \Delta^4 f_{v-1}\right)$$

A programban szükség van a νh mennyiségre. Mivel ν 2^{-30} van adva, azért, hogy a szorzást végrehajthassuk feltesszük, hogy $h > 2^{-10}$, s $\nu < 2^{72}$.

Pozicióelosztás.

Legyen az x /interpolálás helye/ memóriapoziciója: 0010, s az eredményt a 0011 pozicióba helyezzük el. Tegyük fel, hogy az alappontokban felvett függvényértékek a t-től t+n-1-ig terjedő poziciókban vannak elhelyezve. Legyen 0007 az a pozició, ahonnan a vezérlés visszatér.

Paraméterek.

/0012/ = a

/0013/ = b

/0014/ = $/n-1/2^{-30}$ /n az alappontok száma végpontokkal együtt/

/0015/ = $h = \frac{b-a}{n-1}$

/0016/ = $/m-1/.2^{-30}$ /a differenciafokszám Newton polinomok esetében./

(0017) = $t.2^{-30}$

Konstansok.

/0020/ = 2^{-12}

/0021/ = 00 0000 0001

/0022/ = 00 0001 0001

/0024/ = $\frac{1}{3}$

/0025/ = $\frac{1}{4}$

/0026/ = $\frac{1}{6}$

/0027/ = Tr 05 0000 0011

/0030/ = Ty 24 0153 0053

/0031/ = 00 0004 0004

/0032/ = x, 13 0037 0063

/0033/ = 00 0000 0003

/0034/ = -, 11 0053 0054

/0035/ = 10 7777 0000

/0036/ = -, 11 0054 0053

/0037/ = $\frac{1}{2}$

/0040/ = $\frac{2}{3}$

/0041/ = $\frac{3}{4}$

/0042/ = $\frac{4}{5}$

/0043/ = $\frac{5}{6}$

/0044/ = $\frac{6}{7}$

/0045/ = $\frac{7}{8}$

/0046/ = 24 Пy 0262 0064

/0047/ = ↓-, 31 0037 -

/0050/ = ↓+, 30 0037

/0051/ = Пy 24 0275 0053

/0052/ = x, 13 0053 0063

Munkapoziciók.

0077, 0076, 0075, 0074, 0073, 0072, 0053-től 0071-ig.

Program.

0100	11	$-,$	0012	0010	Megvizsgálja, hogy
0101	34	$y\pi$	megáll	0102	az x benne van-e
0102	11	$-,$	0010	0013	az intervallumban.
0103	34	$y\pi$	megáll	0104	
0104	11	$-,$	0012	0013	
0105	24	πy	0106	0077	b-n.
0106	11	$-,$	0012	0010	
0107	33	$\downarrow x,$	0014		
0110	22	$\downarrow :$	0077	0077	$\rightarrow V \cdot 2^{-30}$
0111	21	$\downarrow -$	0021	0075	
0112	05	πh	0012	0076	
0113	00	$+$	0015	0076	
0114	01	$-$	0021	0075	
0115	34	$y\pi$	0116	0113	
0116	51	$\|-\|,$	0010	0076	
0117	71	$\downarrow \|-\|,$	0021		
0120	34	$y\pi$	0307	0121	
0121	11	$-,$	0076	0010	
0122	22	$\downarrow :$	0015	0075	$\rightarrow \frac{x-x_0}{h} = u$
0123	51	$\|-\|,$	0041	0075	
0124	34	$y\pi$	0127	0125	
0125	21	$\downarrow -$	0025	0075	
0126	00	$+$	0021	0077	
0127	10	$+,$	0017	0077	
0130	24	πy	0131	0072	

0131	22	↓:	0020	0074	
0132	30	↓+,	0072		
0133	20	↓+	0035	0072	
0134	21	↓−	0023	0151	
0135	10	+,	0074	0027	
0136	24	Пу	0137	0137	
0137	/05	Пч	t+v	0011/	
0140	11	−,	0077	0033	
0141	34	уП	0142	0245	
0142	11	−,	0077	0014	
0143	71	↓|−|,	0033		
0144	34	уП	0240	0145	
0145	05	Пч	0030	0152	
0146	05	Пч	0031	0073	
0147	24	Пу	0150	0074	
0150	05	Пч	0034	0076	−, 0053, 0054
0151	/11	−,	t+v−2	t+v−1/	
0152	/24	Пу	0153	0053/	
0153	00	+	0023	0151	
0154	00	+	0021	0152	
0155	01	−	0023	0073	
0156	34	уП	0157	0151	
0157	05	Пч	0076	0151	
0160	30	↓+,	0074		
0161	20	↓+	0023	0076	
0162	01	−	0023	0074	
0163	24	Пу	0164	0073	
0164	34	уП	0165	0151	

0165	13	x,	0075	0075
0166	23	↓x	0037	0073
0167	21	↓-	0037	0074
0170	51	(-),	0025	0075
0171	34	yπ	0172	0211
0172	03	x	0026	0074
0173	23	↓x	0073	0072
0174	03	x	0075	0074
0175	03	x	0037	0075
0176	10	+,	0055	0054
0177	33	↓x,	0075	
0200	20	↓+	0011	0011
0201	13	x,	0073	0061
0202	20	↓+	0011	0011
0203	10	+,	0064	0065
0204	33	↓x,	0074	
0205	20	↓+	0011	0011
0206	13	x,	0072	0067
0207	20	↓+	0011	0011
0210	/74	πy	-	0007/
0211	03	x	0075	0074
0212	13	x,	0037	0075
0213	31	↓-,	0037	
0214	23	↓x	0075	0072
0215	23	↓x	0037	0073
0216	11	-,	0037	0075
0217	33	↓x,	0024	

0220	23	↓x	0072	0072
0221	13	x,	0026	0075
0222	31	↓−,	0024	
0223	33	↓x,	0074	
0224	23	↓x	0025	0074
0225	13	x,	0075	0055
0226	20	↓+	0011	0011
0227	10	+,	0062	0061
0230	33	↓x,	0073	
0231	20	↓+	0011	0011
0232	13	x,	0072	0065
0233	20	↓+	0011	0011
0234	10	+,	0070	0067
0235	33	↓x,	0074	
0236	20	↓+	0011	0011
0237	/74	Пy	–	0007/
0240	05	Пч	0050	0257
0241	05	Пч	0072	0273
0242	05	Пч	0036	0073
0243	11	−,	0023	0000
0244	24	Пy	0252	0074
0245	05	Пч	0047	0257
0246	05	Пч	0023	0074
0247	05	Пч	0034	0073
0250	10	+,	0072	0023
0251	24	Пy	00252	0273
0252	05	Пч	0032	0256

0253	05	Пч	0046	0261
0254	20	↓+	0016	0076
0255	05	Пч	0075	0063
0256	/13	х,	0037	0063/
0257	/			/
0260	23	↓х	0075	0075
0261	24 /	Пу	0262	0064/
0262	00	+	0022	0256
0263	00	+	0022	0257
0264	00	+	0021	0261
0265	71	↓⊢,	0076	
0266	34	УП	0256	0267
0267	05	Пч	0016	0075
0270	05	Пч	0052	0301
0271	05	Пч	0075	0076
0272	05	Пч	0051	0274
0273	/			/
0274	24 /	Пу	0275	0053/
0275	00	+	0074	0273
0276	00	+	0021	0274
0277	01	-	0021	0076
0300	34	УП	0301	0273
0301	/13	х,	0053	0063/
0302	20	↓+	0011	0011
0303	05	Пч	0073	0273
0304	00	+	0021	0301
0305	01	-	0021	0075

0306	34	Y∏ ·	0007	0271
0307	10	+ ,	0077	0017
0310	22	⇓ :	0020	
0311	20	⇓ +	0027	0312
0312	/ 05	∏ v		0011/
0313	74	∏ y	-	0007
0314	40	+ ∏ ·	0000	0000
0315	megáll.			

Az Aitken-féle iterációs interpoláció programja.

Készitette: Szelezsán János Szelezsán
Ellenőrizte: Gergely József Gergely József

Legyen adva az $f/x/$ függvénynek az értéke az $x_0, x_1, \ldots\ldots x_{n-1}$ interpolációs alappontokban: $f_0, f_1, \ldots\ldots, f_{n-1}$. Ha $f/x/$-et valamilyen $x = \bar{x}$ helyen akarjuk interpolálni, akkor a kivánt pontosságtól függően, a program kiválaszt $k+1$ számu interpolációs alappontot $x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots\ldots, x_{\mu+k}$ -t, amelyek közrefogják az $\bar{x}$-et, lehetőleg szimmetrikusan $/k+1 \leq n/$. Az ezen pontokra támaszkodó $f/x/$-et interpoláló k-ad foku $\varphi_k/x/$ polinomnak az $\bar{x}$ helyen felvett értékét Aitken módszere szerint a következő séma alapján határozhatjuk meg.

	1.oszlop	2.oszlop	3.oszlop	.....k.oszlop
0.sor	$x_\mu-\bar{x}$	f_μ		
1.sor	$x_{\mu+1}-\bar{x}$	$f_{\mu+1}$,	$/f_\mu, f_{\mu+1}/$	
2.sor	$x_{\mu+2}-\bar{x}$	$f_{\mu+2}$,	$/f_\mu, f_{\mu+2}/$,	$/f_\mu, f_{\mu+1}, f_{\mu+2}/$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
k.sor	$x_{\mu+k}-\bar{x}$	$f_{\mu+k}$,	$/f_\mu, f_{\mu+k}/$,	$/f_\mu, f_{\mu+1}, f_{\mu+k}/$, $/f_\mu, f_{\mu+1}, \ldots, f_{\mu+k}$

Az $/f_i, f_{i+1}, \ldots\ldots f_{i+j}/$ szimbólum a megfelelő indexü alappontokra támaszkodó interpolációs polinomnak az $\bar{x}$ helyen felvett értékét jelenti. Ezeket oszlopról-oszlopra haladva kapjuk meg.

Az 1.oszlopban $f/x_\mu/ = f_\mu, \ldots, f/x_{\mu+1}/ = f_{\mu+1}, \ldots, f/x_{\mu+k}/ = f_{\mu+k}$ függvényértékek állnak.

A 2.oszlop elemeit az

$$/f_\mu f_{\mu+j}/ = \frac{/x_\mu-\bar{x}/\ f_{\mu+j} - /x_{\mu+j}-\bar{x}/\ f_\mu}{/x_\mu - \bar{x}/ - /x_{\mu+j} - \bar{x}/}$$

képlet adja.

Minden további $i+1$-edik oszlop j-edik sorát az i-edik oszlop j-edik és $i-1$-dik sorából a következő képlet alapján számolhatjuk ki:

$$/f_\mu, \ldots\ldots, f_{\mu+i-1}, f_{\mu+j}/ =$$

$$= \frac{/x_{\mu+i-1}-\bar{x}/\ /f_\mu \ldots f_{\mu+i-2}, f_{\mu+j}/ - /x_{\mu+j}-\bar{x}/\ /f_\mu \ldots f_{\mu+i-2}\ f_{\mu+i-1}/}{/x_{\mu+i-1} - \bar{x}/ - /x_{\mu+j} - \bar{x}/}$$

Az $/f_{\mu}\ f_{\mu+1}, \ldots, f_{\mu+k}/$ érték a mátrix utolsó eleme éppen a kiválasztott k+1 pontra támaszkodó $\varphi_k/x/$-nek az $\bar{x}$ helyen felvett értéke.

Elkészitjük az előbbi séma programját egyenlőközü és nem egyenlőközü alappontok esetén egyaránt.

Program-paraméterenként bevisszük a k+1-et, az n-1-et /n az alappontok száma/, az első függvényérték /f₀/ d cimét és első alappontot, x_0-t és ezen kivül egyenlőközü alappontok esetén a lépésközt /h/. Nem egyenlőközü alappontok esetén minden x_i helyet egy-egy memóriapozicióban kell tárolni. A k+1 alappontra támaszkodva a program kiszámitja a $\varphi_k/x/$-nek az $\bar{x}$ helyén felvett értékét.

Egyenlőközü alappontok.

Legyenek az f_0, f_1, ..., f_{n-1} függvényértékek a d, d+1, ...d+n-1 rekeszekben elhelyezve, legyen továbbá /t + 1o5/ = $\bar{x}$. Az eredmény a t+115-ös memóriarekeszben képződik.

Paraméterek:

/t + 1oo/	= x_0	/első alappont/
/t + 1o1/	= h	/lépésköz/
/t + 1o2/	= $/n-1/.2^{-30}$	/ n alappontok száma/
/t + 1o3/	= $/k+1/.2^{-30}$	/felhasználandó alappontok száma/
/t + 1o4/	= d . 2^{-30}	/első függvényérték cime/

Konstansok:

/t + 73/	= 22	↓:	t + 112	t + 115
/t + 74/	= 13	x,	t + 1o7	0001
/t + 75/	= 05	||τ	0000	t + 115
/t + 76/	= 13	x,	t + 1o7	t + 116
/t + 77/	= 00		0077	7777

Munkapoziciók:

t + 105, t + 106, ——— , t + 115, ——— , t + 115 + k - 1

Program:

t	13	x,	0017	t + 103	
t+1	21	↓ -	0005	t + 114	
t+2	22	↓ :	0017	t + 111	→ . t+2

t+3	11	−,	t + 100	t + 105	
t+4	23	↓x	0003	t + 112	$/X-Xo/ \cdot 2^{-12}$
t+5	22	↓:	t + 101	t + 113	$\frac{x-x =}{h} .2^{-12}$
t+6	36	↓∧,	t + 77	—	
t+7	71	↓/−/,	0005	—	
t+1o	34	γΠ	t + 63	t + 11	
t+11	03	x	0004	t + 106	0.2^{-30}
t+12	34	γΠ	t + 71	t + 13	
t+13	21	↓−	t + 102	t + 113	
t+14	34	γΠ.	t + 15	t + 71	
t+15	11	−,	t + 114	t + 106	
t+16	34	γΠ	t + 20	t + 17	
t+17	24	Πy	t + 21	t + 106	
t+2o	05	Πc	0000	t + 106	
t+21	00	+	t + 113	t + 114	
t+22	34	γΠ	t + 25	t + 23	
t+23	11	−,	t + 114	t + 106	
t+24	21	↓−	0005	t + 106	
t+25	12	:,	0004	t + 106	
t+26	33	↓x,	t + 101	—	
t+27	31	↓−,	t + 112	—	
t+30	22	↓:	0003	t + 107	
t+31	24	Πy	t + 32	t + 110	
t + 32	00	+	t + 104	t + 106	
t+33	20	↓+	t + 74	t + 46	
t+34	02	:	0003	t + 106	
t+35	20	↓+	t + 75	t + 36	
t+36	/05	Πc	d+ν−k	t + 115/	
t+37	05	Πc	t + 111	t + 113	
t+40	05	Πc	t + 115	t + 106	
t+41	05	Πc	0000	t + 112	
t+42	05	Πc.	t + 73	t + 50	
t+43	00	+	t + 101	t + 112	
t +44	00	+	t + 101	t + 110	
t+45	23	↓x	t + 106	t + 114	
t+46 /	13	x,	t + 107	d+ν−k+1/	
t+47	31	↓−,	t + 114	—	
t+50 /	22	↓:	t + 112	t + 115 /	
t+51	00	+	0005	t + 46	

t+52	00	+	0005	t + 50
t+53	01	−	0005	t + 113
t+54	34	$\vee\pi$.	t + 55	t + 43
t+55	05	$\pi\tau$	t + 76	t + 46
t+56	00	+	t + 101	t + 107
t+57	24	$\pi\gamma$	t + 60	t + 110
t+60	01	−	0005	t + 111
t+61	34	$\vee\pi$	t + 62	t + 37
t+62	/			/
t+63	13	x,	0004	t + 106
t + 64	30	$\downarrow$+,	t + 104	—
t+65	32	$\downarrow$:,	0003	—
t+66	20	$\downarrow$+	t + 75	t + 67
t + 67	/05	$\pi\tau$	d + v	t + 115/
t+70	74	$\pi\gamma$	—	t + 62
t+71	40	+ π·	0000	0000
t+72		megáll.		

Nem egyenlőközü alappontok.

Pozició elosztás.

Legyenek az $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ alappont értékek az a, a+1, ... a+n-1 ; a megfelelő $f_0, f_1, \dots f_{n-1}$ függvényértékek a d, d+1, ...d+n-1 pozicióban elhelyezve, továbbá az $\overline{x}$ argumentum helye : m. Az eredmény a t+151-ben képződik.

Paraméterek:

/t+146/ = /n-1/ $.2^{-30}$
/t+147/ = /k/ . 2^{-30}
/t+150/ = d . 2^{-30}
/a/ = x_0

Konstansok:

/t+137/	=	24	Πy	t + 60	m + 11
/t+140/	=	13	x,	m + 11	m + 6
/t+141/	=	11	-,	m + 11	m + 10
/t+142/	=	13	x,	m + 11	t + 152
/t+143/	=	13	x,	m + 11	0001
/t+144/	=	05	Πc	0000	t + 151
/t+145/	=	22	↓:	m + 10	t + 151

Munkapoziciók:

m, m + 1, ---------m + 11, ..., m + 11 + k - 1
t + 152, t + 153, --------, t + 151 + k - 1

Program:

t	05	Πc	t + 147	m + 2
t+1	21	↓-	0005	m + 3
t+2	23	↓x	0017	m + 1
t+3	05	Πc	t + 146	m + 4
t + 4	20	↓+	t + 6	t + 12
t+5	24	Πy	t + 6	t + 20
t+6	11	-,	m	a
t+7	34	VΠ·	t + 12	t + 10
t+10	71	↓/-/,	0005	—
t+11	34	VΠ·	t + 125	t + 135
t+12	/11	-,	m	a + n-1/
t+13	34	VΠ·	t + 14	t + 16

t+14	71	↓/-/,	0005	—
t+15	34	УП	t + 126	t + 135
t+16	10	+,	0005	m + 4
t+17	23	↓x	0017	m + 4
t+20	/11	-,	m	a+n-1/
t+21	34	УП	t + 22	t + 27
t+22	00	+	m + 4	t + 20
t+23	71	↓/-/,	t + 12	—
t+24	34	УП	t + 33	t + 25
t+25	05	Пτ	t + 12	t + 20
t+26	74	Пу	-	t + 33
t+27	01	-	m + 4	t + 20
t + 30	71	↓/-/,	t + 6	—
t+31	34	УП	t + 32	t + 33
t+32	05	Пτ	t + 6	t + 20
t+33	05	Пτ.	t + 20	t + 34
t +34	/11	-,	m	a + n - 1/
t+35	71	↓/-/,	0005	—
t+36	34	УП.	t + 127	t + 37
t+37	51	/-/,	0010	m + 4
t+40	34	УП	t + 41	t + 16
t + 41	05	Пτ	t + 6	t + 56
t + 42	01	-	m + 1	t + 20
t+43	71	↓/-/,	t + 6	—
t+44	34	УП.	t + 52	t + 45
t+45	00	+	t + 20	m + 2
t+46	51	/-/,	m + 2	t + 12
t+47	34	УП	t + 50	t + 51
t+50	20	↓+	t + 20	t + 20
t +51	05	Пτ	t + 20	t + 56
t+52	11	-,	t + 6	t + 56
t+53	24	Пу	t + 54	m + 2
t+54	05	Пτ	t + 137	t + 57
t +55	05	Пτ.	t + 147	m + 4
t+56	/11	-,	m	a + v/
t+57	/24	Пу	t + 60	m + 11/
t+60	00	+	0005	t + 56
t+61	00	+	0005	t + 57
t+62	01	-	0005	m + 4

t+63	34	√Π	t + 64	t + 56
t+64	05	Πτ	t + 140	m + 1
t+65	05	Πτ	t + 141	m + 5
t+66	05	Πτ	t + 142	m + 4
t +67	00	+	t + 150	m + 2
t+70	20	↓+	t + 143	t + 107
t+71	12	:,	0003	m + 2
t+72	20	↓+	t + 144	t + 73
t+73	/05	Πτ	d + ν	t + 151/
t+74	00	+	0004	m + 1
t+75	24	Πy	t + 76	t + 103
t+76	00	+	0006	m + 5
t+77	24	Πy	t + 100	t + 105
t+100	05	Πτ	t + 145	t + 111
t+101	05	Πτ	m + 3	m + 2
t+102	05	Πτ.	t + 151	m + 6
t+103	/13	x,	m + 12	m + 6/
t+104	24	Πy	t + 105	m + 7
t+105	/11	-,	m + 12	m + 11/
t+106	24	Πy	t + 107	m + 10
t+107	/13	x,	m + 11	d + ν+1/
t+110	31	↓-,	m + 7	—
t+111	/22	↓:	m + 10	t + 151/
t+112	00	+	0004	t + 103
t+113	00	+	0004	t + 105
t+114	00	+	0005	t + 107
t+115	00	+	0005	t + 111
t+116	01	-	0005	m + 2
t+117	34	√Π	t + 120	t + 103
t+120	00	+	0004	m + 4
t+121	24	Πy	t + 122	t + 107
t+122	01	-	0005	m + 3
t+123	34	√Π.	t + 124	t + 74
t+124	/			. /
t+125	05	Πτ	t + 6	t + 12
t+126	05	Πτ	t + 12	t + 34
t+127	11	-,	t + 6	t + 34
t+130	20	↓+	t + 150	—
t+131	32	↓:,	0003	—

t+132	20	↓ +	t + 144	t + 133
t + 133	/05	Πc	———	t + 151/
t+134	74	Π7	——	t + 124
t+135	40	+Π	0000	0000
t+136		megáll.		

Veidinger László
Készitette: Veidinger László
Szelecsány
Ellenőrizte: Szelecsán János

I.3. A szubrutinok egységes lezárása és relativ címzése

1. A szubrutinok behivása

Az M-3 gép szabvány szubrutinjait a főprogramokban általában a következő két utasitás segitségével célszerű behivni:

utasitás cime	utasitás			
.				
.				
.				
x	+.	10	0006	x
x+1	ПУ	24	s	s+k+1
.				
.				
.				

ahol s-sel jelöltük a szubrutin kezdetét a memóriában, /0006/=+63 7772 0002 /standard konstans/, s+k-val jelöltük a szubrutin utolsó utasitásának pozicióját. A két utasitás hatására a gép az s+k+1 pozicióban elhelyezi a ПУ 74 0000 x+2 utasitást /a visszaugrató utasitást/, és az s pozicióban lévő utasitással elkezdi a szubrutin végrehajtását. Az s+k+1 pozicióban a szubrutinnak a memóriába való bevitelénél célszerü egy megállási utasitást elhelyezni; abban az esetben, ha a szubrutin behivásánál hibát követtünk el, és az s+k+1 pozicióba nem került be a visszaugrató utasitás, a gép végrehajtja a megállási utasitást.

A szubrutin müködéséhez szükséges paramétereket a főprogramnak még a szubrutin behivása előtt el kell helyeznie a szubrutin megfelelő pozicióiban.

2. A szubrutinok elhelyezése a memóriában

Az M-3 gép szubrutinjait olyan alakban kell kidolgozni, hogy a szubrutinokat a memóriában egy tetszőlegesen kiválasztott memóriapoziciótól kezdve elhelyezhessük, és hogy az ehhez szükséges átcimezéseket - az ugynevezett beinditórutin segitségével - maga a gép végezze el.

A beinditórutin használata esetén a standard konstansokat a 0000 - 0037 poziciókban helyezzük el; ezekbe a poziciókba semmi mást nem szabad bevinni. A szubrutinok és a főprogramok utasitásainak cimezését egyaránt mindig 0100-nál kezdjük /ezek az ugynevezett relativ cimek, szemben a memóriában elfoglalt tényleges helyet megjelölő abszolut cimekkel/ A szubrutinoknál és a főprogramnál különválasztjuk a számokat és az utasitásokat /utasitás-konstansokat/; az előbbieket mindig az utóbbiak mögé irjuk.

Az utasitások és konstansok perforálása a szokott módon történik.

A szalagra az utasitásokon és konstansokon kivül a beinditórutin használata esetén még ugynevezett vezérlőkombinációkat is fel kell vinni. Az M-3 beinditórutinja három vezérlőkombinációt képes értelmezni. A

+00 0000 0000

+05 0075 α

vezérlőkombináció hatására, ahol α tetszőleges 0077-nél nagyobb cimet jelöl, a beinditórutim a szalagról leolvasott következő szavakat (utasitásokat vagy utasitás-konstansokat) az α, α +1,... poziciókban helyezi el, és ezek 0077-nél nagyobb cimét α -100-zal növeli. A

±00 0000 0001

vezérlőkombináció hatására a gép a szalagról leolvasott további adatokat /szám-konstansokat/ <u>változatlanul</u> helyezi el a soron következő memóriapoziciókban. A

-00 0000 0000

+74 - β

vezérlőkombináció hatására a beinditórutin átadja a vezérlést a β cimen lévő utasitásnak.

A perforált szalag elejére mindig egy vezérlőkombinációt kell lukasztani.

A beinditórutin használata esetén a ± 00 0000 0000, ±00 0000 0001 konstansokat nem szabad a gépbe bevinni. /Ezeket egyébként is célszerű standard konstansokként állandóan a gépben tárolni/

Ha a program végrehajtása közben ujabb utasításokat illetve konstansokat akarunk a perforált szalagról a gépbe bevinni, egy ПУ 74 --0040 utasítással akármikor ismét átadhatjuk a vezérlést a beindítórutinnak /feltéve, hogy a beindítórutint közben nem töröltük a memóriából./.

3. Az M-3 beindítórutinja

Program

0040	ПЧ	05	0073	0043
0041	Вв	07	----	0075
0042	|-|,	51	0075	0005
0043	(			)
0044	Λ,	16	0003	0075
0045	↓|-|,	71	0074	----
0046	УП	34	0050	0047
0047	+	00	0076	0075
0050	Λ,	16	0002	0075
0051	↓|-|,	71	0004	----
0052	УП	34	0054	0053
0053	+	00	0077	0075
0054	(ПЧ	05	0075	0100)
0055	+	00	0005	0054
0056	ПУ	74	----	0041
0057	|-|,	51	0005	0075
0060	УП	34	0063	0061

oo61	ПЧ	o5	oo72	oo43
oo62	ПУ	74	----	oo41
oo63	Вв	o7	----	oo54
oo64	ПЧ	o5	oo75	oo75
oo65	УП	34	oo54	oo66
oo66	Λ,	16	ooo3	oo54
oo67	↓−	21	oo74	oo76
oo7o	↓:	22	ooo4	oo77
oo71	ПУ	74	----	oo4o

Konstansok

/ooo1/=		+77	7777	oooo	standard konstansok
/ooo2/=		+oo	7777	oooo	
/ooo3/=		+oo	oooo	7777	
/ooo4/=		+oo	o1oo	oooo=2^{-12}	
/ooo5/=		+oo	oooo	ooo1	
/oo72/=	УП	34	oo54	oo57	
/oo73/=	УП	34	oo44	oo57	
/oo74/=		+oo	oooo	o1oo	

Munkapoziciók

oo75, oo76, oo77

II.fejezet.

Egyes közönséges differenciálegyenlettipusok numerikus integrálásának programjai.

Készitette: Szelezsán János
Ellenőrizte: Veidinger László

II. 1. Differencia-képző szubrutin.

A következőkben differencia-módszereket programozunk be differenciálegyenletek numerikus integrálására. Ehhez szükségünk lesz differenciaképzésre.

Definiáljuk a ∇ operátort / az első differencia-operátort/

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$ egyenlőséggel,

ennek m-edik hatványát / az m-edik differencia-operátort/a

$$\nabla^m f_n = \nabla^{m-1} f_n - \nabla^{m-1} f_{n-1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f_{n-k}$$ egyenlőséggel,

ahol $f_n = f(x_n, y_n, \ldots, v_n)$

Legyen $x_n - x_{n-1} = h$

Készitsük el a következő táblázatot:

$$
\begin{array}{lllllll}
 & f_0 & & & & & \\
 & & \nabla f_1 & & & & \\
 & f_1 & & \nabla^2 f_2 & & & \\
 & & \nabla f_2 & & \nabla^3 f_3 & & \\
 & f_2 & & \nabla^2 f_3 & & \nabla^4 f_4 & \ldots \\
 & & \nabla f_3 & & \nabla^3 f_4 & & \\
1. & \vdots & \vdots & \nabla^2 f_4 & & \ldots & \\
 & \vdots & & & & & \\
 & & & & \nabla^3 f_{m-1} & & \nabla^m f_m \\
 & f_{m-2} & & \nabla^2 f_{m-1} & & \nabla^4 f_m & \nabla^m f_{m+1} \\
 & & \nabla f_{m-1} & & \nabla^3 f_m & & \\
 & f_{m-1} & & \nabla^2 f_m & & \ldots & \\
 & & \nabla f_m & & \nabla^3 f_{m+1} & & \\
 & f_m & & \nabla^2 f_{m+1} & & & \\
 & & \nabla f_{m+1} & & & & \\
2. & f_{m+1} & & & & &
\end{array}
$$

Látható, hogy $\nabla^i f_m$ $(i=1,2,\dots m)$ kiszámitásához szükséges van az $f_0, f_1, \dots f_m$ értékekre, amikor a differenciaképzést elkezdjük. A $\nabla^i f_{m+1}$ képzése azonban már egyszerübb, ez a sor már képezhető az előző sorból. és f_{m+1}-ből.

A differenciaképző szubrutin tehát két részből áll. Az első részben /o223-tól o271-ig terjedő poziciókban/ $\nabla^i f_m$-t számitjuk ki, ha $f_0, f_1, \dots f_m$ adva van, a második részben pedig $\nabla^i f_{m+1}$ kiszámitására alkalmas, ha már ismerjük $\nabla^i f_m$-t. $(i=1,2,\dots m.)$

Mivel a gép fixponttal müködik, ezért ügyelni kell arra, hogy a szereplő adatok abszolut értékben egynél kisebbek legyenek.

A $\nabla^m f_n$ differenciára a következő durva becslést lehet lehet adni.

Legyen $|f| < 1$

Akkor $|\nabla^m f_n| = |\Sigma(-1)^k \binom{m}{k} f_{n-k}| \leq$

$$\leq \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} |f_{n-k}| < \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m.$$

A differenciálegyenletek differencia módszerrel történő integrálásánál $h.\nabla^i f_n$-re van szükségünk. $(i=0,1,\dots m)$

Mivel $h\nabla^m f_n = \nabla^m h f_n$,ezért f_n helyett hf_n-el képezzük a megfelelő differenciákat, mégpedig ugy, hogy az fn-t kiszámitó szubrutinban f_n helyett hf_n-t számitjuk ki.

Igy $|h\nabla^m f_n| < h\,2^m.$

tehát $|h\nabla^m f_n| = |\nabla^m h f_n| < 1$

ha $h\,2^m < 1$

azaz $|h| < \frac{1}{2^m}$ /Ez nem jelent lényeges megszoritá...

mert $|x|<1$ lévén, h-t elég kicsire kell választani/. Ilyen feltételek mellett a differenciaképző szubrutinban nem lép fel tulcsordulás.

A szubrutin használata.

Ha a főprogramban differenciaképzés következik, akkor átugrunk a differenciaképző szubrutinra.

1/ A számitás kezdetén, amikor az $f_0, \dots f_m$ függvényértékekből számitjuk a $\nabla^i f_m$ $(i=1,\dots n)$ differenciákat, / a szubrutin első része/ o223-ra ugrunk, s o270-be beirjuk, hogy a differenciaképzés után hova adjuk át a vezérlést.

2/ A továbbiakban o237-re, a szubrutin második részére ugrunk át, - akkor ugyanis már kiszámitott előző differenciákból számitjuk a szükséges további differenciák t - s o320-ba beirjuk, hogy a differencia-képzés után hova adjuk át a vezérlést.

Mivel a számitás kezdetén / az első szakaszban/ az $f_0, \dots f_m$ értékekből számitjuk a differenciák t, ezért meg kell adni az $y, z, \dots$ $\dots u, v$ változók első $m+1$ értékét./ ezekből külön szubrutin képzi az f_i -t/

A $\nabla^i f_{m+1}$ kiszámitásához a következőkben már csak az $y_{m+1}, \dots, v_{m+1}$ értékeket kell megadni. Differenciálegyenleteknél ezek az értékek a differenciálegyenlet megoldásai és a megfelelő differenciálhányadosok. Ezeket éppen a differenciálegyenlet megoldását kiszámitó szubrutin számitja ki, s helyezi el a differenciaképző szubrutin megfelelő helyeire.

Pozició-elosztás

Legyen a $h\ f(x, y, \dots u, v)$ -t kiszámitó szubrutin az α-tól $(\alpha+k-1)$ -ig terjedő poziciókban elhelyezve, az eredményt a o22o-be helyezzük el, $(\alpha+k)=24$ ŕy o221 legyen.

Legyen az

x_i	argumentum helye	o2oo
y_i	helye	o2o1
:		
v_i	"	o2o1+ $\ell-1$

A kezdőértékeket a következő poziciókba helyezzük el.

/oo31/=y_0	/oo31+ℓ/ =y_1
/oo32/=u_0	/oo32+ ℓ /=u_1
/oo31+ ℓ -1/=v_0	/oo31+2ℓ -1/=v_1

Feltesszük, hogy $0 \leq \ell \leq 10$ $0 < m \leq 10$, tehát az itt elfoglalt poziciók a oo31-től o15o-ig terjedők.

o151-től o175-ig a differenciák elhelyezésére szolgáló poziciók.

Konstansok

/0001/=	00	0000	0001
/0002/=	00	0001	0000
/0003/=	00	0001	0001
/0004/=	04	0001	0001
/0005/=	2^{-12}		
/0006/=	Πτ 05	0031	0201
/0007/=	Πγ 24	0247	—
/0010/=	Πγ 24	0306	—
/0011/=	Πτ 05	0151	0152
/0012/=	- 01	0152	0024
/0013/=	Πτ 05	0026	0152
/0014/=	Πτ 05	0220	0152
/0015/=	Πτ 05	0222	0310

Paraméterek:

/0016/= $x_0 = a$
/0017/= h

/0020/=	24 Πγ	α	—
/0021/=	00	0000	000ℓ
/0022/=	00	0000	000m

Munkapoziciók

0023
0024
0025
0026
0027
0030

Program

0223	−,	11	0001	0014
0224	Πγ	24	0225	0247
0225	:,	12	0005	0022
0226	↓+	20	0022	0027
0227	↓+	20	0011	0255
0230	↓−	21	0004	0256
0231	Πγ	24	0232	0030
0232	+,	10	0014	0022
0233	Πγ	24	0234	0024
0234	−,	11	0004	0011
0235	↓+	20	0003	0023
0236	Πτ	05	0006	0243
0237	Πτ	05.	0007	0221
0240	Πτ	05	0016	0200
0241	−,	11	0001	0021
0242	↓+	20	0000	0025
0243	(Πτ	05	0031	0201)
0244	+	00	0003	0243
0245	−	01	0001	0025
0246	ΣΠ	34	0020	0243
0247	Πτ	05	0220	0151
0250	+	00	0017	0200
0251	−	01	0021	0243
0252	+	00	0001	0247
0253	↓−,	21	0024	
0254	ΣΠ	34	0243	0255
0255	(Πτ	05	0151 + m	0152 + m)
0256	(−	01	0150 + m	0151 + m)
0257	−	01	0003	0256
0260	↓−,	31	0023	----
0261	ΣΠ	34	0262	0256
0262	+	00	0003	0023
0263	+	00	0027	0256
0264	−	01	0003	0027

0265	+	00	0001	0255
0266	-,	11	0023	0030
0267	⊻Π	34	0270	0255
0270	. . .			
0271	. . .			
0272	. . .			
0273	Πτ	05	0010	0221
0274	:,	12	0005	0022
0275	↓+	20	0012	0307
0276	+,	10	0022	0013
0277	Πy	24	0300	0222
0300	↓+	20	0022	0024
0301	Πy	24	0302	0316
0302	+,	10	0022	0014
0303	Πy	24	0304	0317
0304	+	00	0017	0200
0305	Π⊻	74	—	0020
0306	Πτ	05	0220	0025
0307	(-	01	0152 + m	0025)
0310	Πτ	05	0222	0310
0311	Πτ	05	0025	0026
0312	+	00	0002	0307
0313	+	00	0001	0310
0314	↓-,	31	0024	
0315	⊻Π	34	0307	0316
0316	(Πτ	05	0026	0152 +2m)
0317	(Πτ	05	0220	0152 + m)
0320	Πτ.	05	0015	0310
0321		..	....	....

Készítette: [illegible]
Ellenőrizte: Veidinger László

II. 2 Közönséges differenciálegyenletek megoldása differencia-módszerekkel.

A differenciálegyenletek numerikus integrálására szolgáló differenciamódszerek lényege az, hogy az x_r pontban vett y_r közelitőértéket a már előbb kiszámitott $y_{r-1}, y_{r-2}, \dots y_{r-k}$ értékek s a $\nabla^{\ell} f_r$ $/\ell = 1, \dots, m/$ differenciák segitségével számitjuk ki.

Ezeknek a módszereknek az a hátrányuk, hogy a számitás elkezdéséhez m+1 kezdőértékre van szükség /m a legmagasabb felhasznált differencia fokszáma/ ezeket valamilyen más módszerrel kell kiszámitani.

A lépésközt / $\frac{b-a}{n} = h$ / a számitás elején választjuk meg. A szükséges differenciákat a differenciaképző szubrutin behivásával képezzük.

A tulcsordulás elkerülése végett feltesszük, hogy:

$|y| \leq K_0 < 1;$ $|y'| = |f/x,y/| \leq K_1 < 1.$

$|y''| = /f/x,y,y'/ \leq K_2 < 1.$

/Ilyen alakra transzformáltuk a differenciálegyenletet./

A következő módszerek programját készitjük el:

a./ Elsőrendü differenciálegyenletekre:

1/ Nyström módszere.

2/ Adams módszere. 3) Milne módszer.

b/ Másodrendü differenciálegyenletekre:

1/ Adams módszere.

2/ Störmer-Nystrom módszere.

Nyström módszere elsőrendű közönséges differenciálegyenlet megoldására.

Legyen adva az $y'=f/x,y/$ differenciálegyenlet az $y/x_0/=y_0$ feltétellel, az $a \leq x \leq b$ intervallumban.

Nyström képlete szerint az x_{r+1} pontban a megoldás y_{r+1} közelitő értéke.

$y_{r+1} = y_{r-1} + [2hf_r + \frac{1}{3}\nabla^2 hf_r + \frac{1}{3}\nabla^3 hf_r + \frac{29}{9}\nabla^4 hf_r + \frac{14}{45}\nabla^5 hf_r$.

ahol $f_r = f/x_r, y_r/$

Lásd Collatz: im. 5oo oldal./

A közbülső eredmények vizsgálata.

Minthogy $|\nabla^m hf_r| < h2^m$ igy

$|2hf_r + \frac{1}{3}\nabla^2 hf_r + \frac{1}{3}\nabla^3 hf_r + \frac{29}{90}\nabla^4 hf_r + \frac{14}{15}\nabla^5 hf_r| <$.

$< 2\,h + \frac{1}{3}\,4h + \frac{1}{3}\,8h + \frac{29}{90}\,16h + \frac{14}{25}\,32h < 24h$

Ha $24h < 1$ azaz $h < \frac{1}{24}$ akkor $[2hf_r + \frac{1}{3}\nabla^2 hf_r + \ldots \frac{14}{15}\nabla^5 hf_r]$ nem csordul tul.

Ha $|y| < K_0 = 1 - \varepsilon$ /ahol ε a közelités pontossága $|y(x_i) - y_i| < \varepsilon$ /

akkor nem lép fel tulcsordulás.

Pozicióelosztás

A differenciaképző szubrutin paraméter helyeire beirjuk a megfelelő paraméter értékeket.

l=1

m=5

Konstansok

/0500/= $\frac{1}{2}$

/0501/= $\frac{1}{3}$

/0502/= $\frac{29}{90}$

/0503/= $\frac{14}{45}$

/0504/= Fy 74 - 0553

/0505/=02 0570 0200

Paraméterek

/0506/= b - h.

Munkapoziciók

0507

0550	05	Πτ	0504	0270
0551	05	Πτ	0504	0321
0552	24	Γγ	0223	----
0553	10	+,	0161	0162
0554	23	↓x	0501	0507
0555	12	:,	0500	0157
0556	20	↓+	0507	0507
0557	13	x,	0502	0163
0560	20	↓+	0507	0507
0561	13	x,	0503	0164
0562	20	↓+	0507	0507
0563	20	↓+	0035	0201
0564	05	Πτ	0036	0035
0565	05	Πτ	0201	0036
0566	05	Πτ	0505	β
0567	24	Πγ	β'	----
0570	11	-,	0200	0506
0571	34	⊻Π.	0572	0273
0572	megáll			

Elsőrendü közönséges differenciálegyenlet megoldása Adams-féle extrapolációs módszerrel.

Legyen adva az $y'=f/x,y/$ differenciálegyenlet az $a \le x \le b$ intervallumban $y'/x_o/=y_o$ kezdeti feltétellel. Ennek az x_{r+1} ponthoz tartozó közelitő megoldását Adams módszere szerint

1/ $y_{r+1} = y_r + h f_r + \frac{1}{2}\nabla f_r + \frac{5}{12}\nabla^2 f_r + \frac{3}{8}\nabla^3 f_r + \frac{251}{720}\nabla^4 f_r + \frac{95}{288}\nabla^5 f_r +$
$+ \frac{19087}{60480}\nabla^6 f_r$ képlet adja,

ahol $f_r = f/x_r, y_r/ = y'_r$

A közbülső eredmények vizsgálata.

A feltevés szerint: $|y| < K_o$ $|y'| < 1$; $|x| < 1$

Mivel igy $|\nabla^m hf_n| < 2^m h$.

Ezért

$$|h f_r + \sum_{k=1}^{m} c_k \nabla^k h f_k| < A_m(h); \quad \left(|c_k| < \frac{1}{2}\right)$$

Ha h olyan, hogy $|A_m(h)| < 1$ és $|y| \le K_o = 1 - \varepsilon$.

(ahol $|y(x_1) - y_1| < \varepsilon$; $x_1 \in /a, b/$)

akkor nem lép fel tulcsordulás.

Pozicióelosztás

A differenciaképző szubrutin paraméterhelyeire beirjuk a megfelelő paraméterértékeket.

Itt $m = 6$

$\ell = 1$

Konstansok

/0500/= $\frac{1}{2}$

/0501/= $\frac{5}{12}$

/0502/= $\frac{3}{8}$

/0503/= $\frac{251}{720}$

/0504/= $\frac{95}{288}$

/0505/= $\frac{19087}{60480}$

/0506/= 24 Ty - 0532

/0507/= +00 0512 0201

/0510/= x13 0500 0153

/0511/= 02 0542 0200

Paraméter

/0512/= b-h

Munkapoziciók: 0513

0520	:;	12	0005	0022
0521	Πy	24	0522	0514
0522	↓+	20	0022	0027
0523	Πc	05	0506	0270
0524	Πc	05	0506	0321
0525	+,	10	0022	0510
0526	Πy	24	0527	0533
0527	↓+	20	0027	0513
0530	+,	10	0513	0507
0531	Πy	24	0223	0532
0532	(+	00	0152+m	0201)
0533	(×,	13	0500	0153+m)
0534	↓+	20	0201	0201
0535	+	00	0003	0533
0536	↓1-1,	71	0513	
0537	ΣΠ	34	0533	0540
0540	Πc	05	0511	(β
0541	Πy	24	(β'	–
0542	-	01	0027	0533
0543	-,	11	0200	0512
0544	ΣΠ	34	megáll	0273

Másodrendü közönséges differenciálegyenlet megoldása Adams extrapolációs módszerével.

Legyen adva az $y''=f/x,y,y'/$ differenciálegyenlet az $y_0=y/x_0/$, $y'/x_0/=y'_0$ kezdeti feltétellel az $a \leq x \leq b$ intervallumban. Ennek közelitő megoldását az x_{r+1} pontban

1/ $y_{r+1}=y_r+hy'_r+h^2 / \frac{1}{2} f_r + \frac{1}{6}\nabla f_r + \frac{1}{8}\nabla^2 f_r + \frac{19}{180}\nabla^3 f_r + \frac{3}{32}\nabla^4 f_r/$

2/ $y'_{r+1}=y'_r + h\left(f_r + \frac{1}{2}\nabla f_r + \frac{5}{12}\nabla^2 f_r + \frac{3}{8}\nabla^3 f_r + \frac{251}{720}\nabla^4 f_r\right)$

képletek segitségével számitjuk ki, ahol $f_r = f/x_r, y_r, y'_r/$ /lásd Collatz: i.m. 500 old./

Közbülső eredmények vizsgálata.

A feltevés szerint: $/y'/< k_0$ $/y/ < k$. $/y''/ < 1$, $/x/<1$

Minthogy igy $/ \nabla^m hf_r/ < h2^m$

ezért

$/h \frac{1}{2} hf_r + \frac{1}{6}\nabla hf_r + \frac{1}{8}\nabla^2 hf_r + \frac{19}{180}\nabla^3 hf_r + \frac{3}{32}\nabla^4 hf_r$.

$h\left(\frac{1}{2} h + \frac{1}{6}2h + \frac{1}{8}h2^2 + \frac{19}{180}h2^3 + \frac{3}{32} h2^4\right) < 5h^2$

De $/hy'_r/ < 1$

Igy ha $/y/ < k_1=1-\varepsilon$ /ahol $/y(x_i) -y_i/ < \varepsilon$ / és

$h+5h^2 <1$, akkor 1/-ben nem lép fel tulcsordulás.

2/ben viszont

$/hf_r + \frac{1}{2}\nabla f_r + \dots + \frac{251}{720}\nabla^4 f_r/< h$

Ha $/y'/ \leq k_0 = 1-\varepsilon'$ $(/y' /x_i/ - y_i/< \varepsilon$ / és $15h <1$,

akkor 2./-ben sem lép fel tulcsordulás.

Pozicióelosztás

A differenciaképző szubrutin paraméterhelyeire beirjuk a megfelelő paraméterértékeket.

Itt m = 4

l = 2

Konstansok					Paraméterek
/o5oo/=	$\frac{1}{2}$				/o514/= b=h
/o5o1/=	$\frac{1}{6}$				
/o5o2/=	$\frac{1}{8}$				
/o5o3/=	$\frac{19}{180}$				
/o5o4/=	$\frac{3}{32}$				
/o5o5/=	$\frac{5}{12}$				
/o5o6/=	$\frac{3}{8}$				
/o5o7/=	$\frac{251}{720}$				
/o51o/=	Γ_{y}	24	o53o	–	
/o511/=	x_1	13	o162	o5o4	
/o512/=	o2		o557	o2oo	
/o513/=	oo		ooo5	ooo5	

Munkapoziciók:

515

516

Program

0525	05	Πτ	0510	0270
0526	05	Πτ	0510	0321
0527	24	Πγ	0223	----
0530	05	Πτ.	0000	0515
0531	13	×,	0156	0500
0532	20	↓+	0515	0515
0533	00	+	0003	0531
0534	11	−,	0531	0511
0535	34	∨Π.	0536	0531
0536	03	×	0017	0515
0537	13	×,	0017	0202
0540	20	↓+	0515	0515
0541	20	↓+	0201	0201
0542	05	Πτ	0000	0515
0543	13	×,	0157	0500
0544	20	↓+	0156	0515
0545	13	×,	0160	0505
0546	20	↓+	0515	0515
0547	13	×,	0161	0506
0550	20	↓+	0515	0515
0551	13	×,	0162	0507
0552	30	↓+,	0515	----
0553	20	↓+.	0202	0202
0554	05	Πτ	0512	β
0555	24	Πγ	β'.	----
0556	01	−	0513	0531
0557	11	−,	0200	0514
0560	34	∨Π.	0561	0233
0561				

Störmer Nyström extrapolációs módszere közönséges másodrendü differenciálegyenlet megoldására.

Legyen adva az $y''=f\,/x,y,y'/$ differenciálegyenlet az $x/x_0/=y_0$ $\quad y'/x_0/=y'_0$ kezdeti feltételekkel az $a \leq x \leq b$ intervallumban. Ennek közelitő numerikus megoldását az x_r pontban Strömer Nyström módszere szerint:

$$1/\quad y_{r+1} = 2y_r - y_{r-1} + h^2/f_r + \frac{1}{12}\nabla^2 f_r + \frac{1}{12}\nabla^3 f_r + \frac{19}{240}\nabla^4 f_r + $$
$$+ \frac{3}{40}\nabla^5 f_r + \frac{863}{12096}\nabla^6 f_r/$$

$$2/\quad y'_{r+1} = y'_r + h\, f_r + \frac{1}{2}\nabla f_r + \frac{5}{12}\nabla^2 f_r + \frac{3}{8}\nabla^3 f_r + \frac{251}{720}\nabla^4 f_r \cdot$$
$$+ \frac{95}{288}\nabla^5 f_r + \frac{19087}{60480}\nabla^6 f_r .$$

képletek segitségével számithatjuk ki, ahol

$$f_r = f/x_r,\ y_r,\ y_r/$$

/Lásd Collatz, i.m. 5oo old./

Közbülső eredmények vizsgálata.

A feltevés szerint: $|y| < K_0$; $|y'| < K_1$; $|x| < 1$; $|y''| < 1$

Minthogy $|\nabla^m hf_m| < 2^m h$, igy mind 1/-ben mind 2/-ben $|c_k| < \frac{1}{2}$ miatt

$$H = \left|hf_r + \sum_{k=1}^{m} c_k \nabla^k hf_m\right| < A_m/h/;$$ s h-t ugy kell megválasztani, hogy $A_m\,/h/ < 1$ legyen.

Ezzel 2/ben már biztositottuk a tulcsordulás elkerülését, ha csak $y' < K_0 = 1-\varepsilon$ /ahol $|y'(x_i) - y'_i| < \varepsilon'$ /.

1/ben azonban H helyett hH szerepel, nyilván $/hH/ < h$ s igy $/hH - y_{r-1}/ \leq hH + /y_{r-1}/$

De 1/-ben szerepel $2y_r$ is. Nyilván $/2y_r/ < 1$ ha $/y_r/ < \frac{1}{2}$

Tehát ha $/y/ < \frac{1}{2} - \varepsilon$ /ahol $/y\,/x_i/ - y_i/ < \varepsilon$;/, akkor $hH + /y_{r-1}/ \leq$ $< \frac{1}{2} + hH$ s igy sehol sem lép fel tulcsordulás.

Konstansok:

/0500/=	$\frac{1}{2}$			
/0501/=	$\frac{5}{12}$			
/0502/=	$\frac{3}{8}$			
/0503/=	$\frac{251}{720}$			
/0504/=	$\frac{95}{288}$			
/0505/=	$\frac{19087}{60480}$			
/0506/=	$\frac{1}{12}$			
/0507/=	$\frac{1}{12}$			
/0510/=	$\frac{19}{240}$			
/0511/=	$\frac{3}{40}$			
/0512/=	$\frac{863}{12096}$			
/0513/=	$\frac{1}{2}$			
/0514/=	$\Pi\tau$	05	0152	0526
/0515/=	$\Pi\tau$	05	0027	0203
/0516/=	x_1	13	0500	0153
/0517/=		00	0005	0000
/0520/=		00	0006	0001
/0521/=		02	0200	0612
/0522/=	Πy.	24	0564	

Munkapoziciók:

0525
0526
0527
0530
0531

Paraméterek:

/0524/= $b-h$.

0550	05	Πτ	0522	0270
0551	05	Πτ	0522	0321
0552	12	:,	0005	0022
0553	24	Πy	0554	0531
0554	20	↓+	0514	0566
0555	12	:,	0513	0531
0556	20	↓+	0515	0561
0557	10	+,	0516	0022
0560	24	Πy	0561	0527
0561	(			)
0562	11	−,	0001	0022
0563	24	Πy	0223	0530
0564	05	Πτ	0527	0567
0565	05	Πτ	0530	0525
0566	(			)
0567	(			)
0570	20	↓+	0526	0526
0571	00	+	0003	0567
0572	01	−	0001	0525
0573	34	∨Π	0574	0567
0574	00	+	0526	0202
0575	00	+	0526	0527
0576	00	+	0517	0573
0577	01	−	0001	0530
0600	24	Πy	----	0564
0601	13	×,	0017	0526
0602	21	↓−	0203	0526
0603	05	Πτ	0201	0203
0604	12	:,	0513	0201
0605	20	↓+	0526	0201
0606	01	−	0520	0527
0607	01	−	0517	0573
0610	05	Πτ	0521	β
0611	24	Πy	β'	—
0612	00	+	0001	0530
0613	11	−,	0200	0524
0614	34	∨Π.	megáll	0273

Készitette : Szelozsán János
Ellenőrizte: Veidinger László

II.3 Elsőrendü közönséges differenciálegyenlet megoldása Milne módszerrel.

/iteráció nélkül/

A Milne módszer szerint az /ab/-ben $y(x_0)=y_0$ kezdeti feltétellel adott $y'=f(x,y)$ differenciálegyenletnek az x_{r+1} pontban vett közelitő megoldása:

$$y^*_{r+1} = y_{r-3} + 4h\left[f_{r-1} + \frac{2}{3}\nabla^2 f_r\right] \qquad f^*_{r+1} = f(x_{r+1}, y^*_{r+1})$$

$$y_{r+1} = y_{r-1} + h\left[2f_r + \frac{1}{3}\nabla^2 f^*_{r+1}\right].$$

képletek segitségével számitható ki.

Mivel a gép fix ponttal működik, ezért ügyelni kell arra, hogy mind a közbülső, mind a végeredmények abszolút értékben $1-2^{-30}$nál ne legyenek nagyobbak.

Legyen az $X = u(x,y)$ $Y = v(x,y)$ transzformáció olyan, amely a differenciálegyenletre alkalmazva olyan

$Y' = F(X,Y)$ $Y(X_0) = Y_0$ differenciálegyenlethez vezet, amelyben

$$|Y| < K_0 < 1 \qquad |Y'| < K_1 < 1 \qquad |X| \leq 1-2^{-30}.$$

A $K_0 K_1$ -t a közbülső eredmények vizsgálatából határozzuk meg.

Mivel

$$|\nabla^2 f_r| \leq K_1 2^2$$

/lásd differenciaképző szubrutin bevezetése/

ezért ha $K_1 2^2 < 1$ azaz $K_1 < \frac{1}{4}$.

akkor

$$|\nabla^2 f_r| < 1.$$

s igy $\quad |\frac{2}{3}\nabla^2 f_r| < \frac{2}{3}$

Tehát $\quad |f_{r-1} + \frac{2}{3}\nabla^2 f_r| < |f_{r-1}| + \frac{2}{3} < \frac{1}{4}.$

s $4h|f_{r-1} + \frac{2}{3}\nabla^2 f_r| < 4h\frac{11}{12}$ de ha $|h| \le 0{,}1.$

akkor

$$4h\frac{11}{12} \le \frac{4{,}4}{12} < \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

s igy $|y^*_{r+1}| < |y_{r-3}| + \frac{1}{2}.$

Ha tehát $\quad |y| < \frac{1}{2}.$ $\quad$ akkor $|y^*_{r+1}| < 1.$

Ha feltesszük, hogy $\quad |f(x,y)| < \frac{1}{4} \quad (|y| < 1,\ |x| < 1)$

akkor $\quad |f^*_{r+1}| < \frac{1}{4}$

s igy

$$|\frac{1}{3}\nabla^2 f^*_r| < \frac{1}{3}$$

tehát:

$$|2f_r + \frac{1}{3}\nabla^2 f^*_{r+1}| < 2|f_r| + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

továbbá

a/

$$h|2f_r + \frac{1}{3}\nabla^2 f^*_{r+1}| < h\frac{5}{6}.$$

Tehát

$$K_0 = \frac{1}{2}$$
$$K_1 = \frac{1}{4}.$$

esetén nem fordul elő tulcsordulás.

P o z i c i ó e l o s z t á s

Konstansok:

/0001/=00		0001	0001
/0002/=00		0000	0001
/0003/=00		0001	0000
/0004/24	Πy	0142	
/0005/25	Πz·	0036	0035
/0006/24	Πy	0160	
/0007/25	Πz	0043	0042
/0010/24	Πy·	0126	
/0011/= $\frac{2}{3}$			
/0012/= $\frac{1}{2}$			
/0013/= $\frac{1}{3}$			
/0014/=02		0174	0070
/0015/24	Πy	0115	
/0016/25	Πz	0061	0037
/0017/=00		0000	0002
/0020/25	Πz	0033	0032
/0021/24	YΠ·	0206	0073
/0022/25	Πz	0054	0032
/0023/25	Πz	0072	0040
/0024/25	Πz	0072	0044
/0025/25	Πz·	0072	0042

Paraméterek:

/0026/= x_0
/0027/= $6-2^{-30}$.
/0030/= h.

/0054/= y_0
/0055/= y_1
/0056/= y_2

/0057/= y_3
/0060/= y_4
/0061/= y_5.

Munkapoziciók:

0030					
0031	0032	0040	0045	0047	0051
	0033	0041	0046	0050	0052
	0034	0042			0053
	0035	0043			0062
	0036	0044			0063
	0037				0064
					0065
					0066

Legyen az $f(x_r, y_r)$ értékét kiszámitó szubrutin az α -ból $\alpha+k-1$ -ig terjedő poziciókban elhelyezve, s $(\alpha+k)=\Pi_y$ 0074 legyen.

Legyen ebben a szubrutinban

0070	az x_r helye
0071	az y_r "
0072	az $f(x_r, y_r)$ eredmény helye
/0073/=	$\Pi_y - \alpha$.
/0074/=	kiugrató pozició

P r o g r a m

0077	Пz	05	0033	0071
0100	+,	10	0030	0030
0101	↓+	22	0012	0064
0102	:,	12	0013	0030
0103	↓+	20	0026	0063
0104	+,	10	0026	0030
0105	↓+	20	0000	0070
0106	Пz	05	0054	0032
0107	+	00	0001	0106
0110	-,	11	0106	0016
0111	×П	34	0112	0106
0112	Пz	05	0015	0074
0113	Пz	05	0033	0071
0114	Пy	24	0073	
0115	Пz	05	0072	0040
0116	+	00	0002	0115
0117	+	00	0030	0070
0120	+	00	0003	0113
0121	-,	11	0115	0024
0122	×П	34	0123	0113
0123	-,	11	0040	0041
0124	↓+	20	0000	0045
0125	Пz	05	0017	0031
0126	(	00	0000	0000)
0127	Пz	05	0020	0145
0130	-,	11	0041	0042
0131	↓+	20	0000	0046
0132	↓-,	21	0045	
0133	↓×,	33	0011	
0134	↓+,	30	0041	
0135	↓×,	33	0064	
0136	↓+	20	0032	0071
0137	Пz	05	0004	0074
0140	+	00	0030	0063
0141	Пy	24	0073	0070
0142	Пz	05	0072	0047
0143	+	00	0002	0142
0144	Пz	05	0046	0045

0145	00	(..	....	....)
0146	+	00	0001	0145
0147	−,	11	0145	0005
0150	⊻π·	34	0151	0145
0151	πz	05	0042	0041
0152	πz	05	0043	0042
0153	πz	05	0044	0043
0154	−	01	0002	0031
0155	⊻π·	34	0156	0127
0156	−,	11	0047	0050
0157	↓+	20	0000	0047
0160	−,	11	0050	0051
0161	↓+	20	0000	0050
0162	↓−	21	0047	0031
0163	πz	05	0050	0047
0164	πz	05	0051	0050
0165	×	03	0013	0031
0166	:,	12	0012	0042
0167	↓+,	30	0031	----
0170	↓×,	33	0030	----
0171	↓+	20	0033	0071
0172	πz	05	0014	
0173	πy	24		----
0174	πz	05	0071	0035
0175	πz	05	0010	0074
0176	−,	11	0070	0027
0177	⊻π·	34	0210	0200
0200	πz	05	-0006	0152
0201	πz	05	0025	0126
0202	+	00	0003	0004
0203	πz	05	0143	0065
0204	πz	05	0177	0066
0205	πz	05	0021	0177
0206	−	01	0002	0142
0207	πy	24	0073	0143
0210	πz	05	0065	0143
0211	−	01	0003	0004
0212	−	01	0017	0142

0213	π_2	05	0022	0106
0214	σ_2	05	0023	0115
0215	π_2	05	0007	0152
0216	π_2	05	0066	0177
0217	π_2	05	0077	0113
0220	π_2	05	0000	0126
0221	megáll			

Készitette: Szolossán János
Ellenőrizte: Veidinger László

II. 4. Közönséges elsőrendű differenciálegyenlet megoldása Milne módszerével

/iterációval/

Legyen adva az $y' = f(x,y)$; $y(x_0) = y_0$ differenciálegyenlet. Ennek numerikus integrálása Milne módszerrel a következő módon történik.

Az $y_{n-3}; y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$ segitségével az

1./ $y^{(1)}_{n+1} = y_{n-3} + h\left(\frac{8}{3}f_n - \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{8}{3}f_{n-2}\right)$ képlet

alapján kiszámitjuk y_{n+1} első közelitését.

Ezzel az első közelitéssel kiszámitjuk f_{n+1}-et s y_{n+1} második, harmadik, stb. ν-edik közelitését az

2./ $y^{(\nu)}_{n+1} = y_{n-1} + h\left(\frac{1}{3}f^{(\nu-1)}_{n+1} + \frac{4}{3}f_n + \frac{1}{3}f_{n-1}\right)$ képlettel.

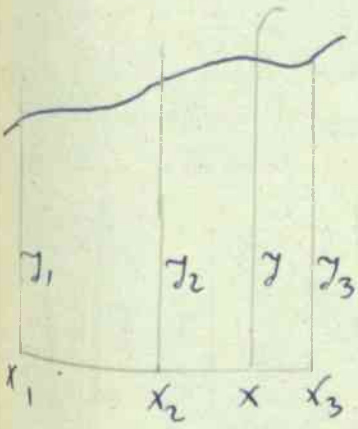
számitjuk ki. A 2.-es iteráló eljárást addig folytatjuk amig $y^{(\nu)}_{n+1} = y^{(\nu-1)}_{n+1}$

/Lásd: Békéssy András: "Közönséges differenciálegyenletek numerikus integrálása" c. jegyzet 27-28. old./

A 2./-es iteráló eljáráshoz megoldunk egy i° lépésszámot, s ha az iterációt ennél többször kellene végrehajtani ahhoz, hogy $y^{(\nu)}_{n+1} = y^{(\nu-1)}_{n+1}$ legyen, akkor a lépésközt felezzük, s ezzel az uj lépésközzel számolunk tovább. Az uj osztópontokhoz tartozó függvényértékeket kvadratikus interpolációval határozzuk meg.

A kvadratikus interpoláció képlete /lásd: Hajós György: "Numerikus és grafikus módszerek" c. jegyzete/ az ábrán látható jelölésekkel:

$$y = y_2 + \frac{x}{2h}\left[(y_2 - y_1)\left(1 - \frac{x}{h}\right) + (y_3 - y_2)\left(1 + \frac{x}{h}\right)\right]$$



esetünkben

$$x = \frac{h}{2}.$$

s így az:

$$y = 3\left(\frac{y_2}{4} + \frac{y_3}{8}\right) - \frac{y_1}{8}.$$

képlethez jutunk.

a) **Milne-módszer fixpontos programja.**

Az adott képleteket a következő alakban irjuk át.

1./ $y^{(1)}_{n+1} = y_{n-3} + 8\left(\frac{h}{3} f_n - 4\frac{h}{3} f_{n-1} + \frac{h}{3} f_{n-2}\right)$

2./ $y^{(2)}_{n+1} = \frac{h}{3} f^{(\nu-1)}_{n+1} + \left[y_{n-1} + \left(4\frac{h}{3} f_n + \frac{h}{3} f_{n-1}\right)\right]$

A közbülső eredmények vizsgálata.

A feltevés szerint $|y| \le K_0 < 1$ $|y'| < 1$ $|x| < 1$.

Igy: $\left|\frac{h}{3} f_n\right| < \frac{h}{3}$.

s $\left|8\frac{h}{3} f_n + 4\frac{h}{3} f_{n-1} + 8\frac{h}{3} f_{n-2}\right| \le$

$\le 8\frac{h}{3} + 4\frac{h}{3} + 8\frac{h}{3} = \frac{20h}{3} < 7h$.

Igy az 1./-es képletben

$|y^{(1)}_{n+1}| \le |y_{n-1}| + 7h < 1$ ha $|y_{n-3}| < 1-7h$.

a 2./ képletben

$|y^{(2)}_{n+1}| \le \left|\frac{h}{3} f^{\nu-1}_{n}\right| + |y_{n-1}| + 5\frac{h}{3} < 6\frac{h}{3} + |y_{n-1}|$

Ha tehát $|y_i| < 1-7h$ akkor a közbülső eredmények sem csordulnak tul.

Tehát $K_0 = 1-7h-\varepsilon$ -t véve biztositjuk a tulcsordulás elkerülését.

Pozicióelosztás

Legyen az $f(x,y)$-t kiszámitó szubrutin az α-tól $\alpha+k-1$-ig terjedő poziciókban elhelyezve, s $(\alpha+k) = \Pi_y - 0021$ legyen.

Legyen ebben a szubrutinban

x helye oo7o

y helye oo71

f/x,y/" oo72

a/oo22/= Ty 74 — α

Konstansok

/ooo1/= $\frac{1}{3}$

/ooo2/= oo ooo1 oooo

/ooo3/= oo oooo ooo1

/ooo4/= 24 Ty o114 oo44

/ooo5/= $\frac{1}{8}$

/ooo6/= $\frac{1}{4}$

/ooo7/= $-\frac{1}{4}$

/oo1o/= 74 Ty ---- o312

/oo11/= 74 Ty ---- o136

/oo12/= o5 T2 oo62 oo71

/oo13/= o2 oo7o o153

/oo14/= $\frac{1}{2}$

/oo15/= $-\frac{2}{5}$

/oo16/= 24 Ty o114 oo41

Paraméterek

/oo3o/= y_o

/oo31/= y_1

/oo32/= y_2

/oo33/= y_3

/oo34/= x_o

/oo35/= h

/oo36/= /1-1/2^{-30} /az iterációs lépések maximális száma/

/oo37/= b-2^{-30}

/oo22/= 74 Ty α

Munkapozíciók

0041, 0042, 0043, 0060, 0061, 0062, 0063, 0064, 0065, 0066, 0067, 0070, 0071, 0073, 0020, 0021,

Program

0073	Πz	05	0035	0020
0074	Πz	05	0013	
0075	x,	13	0030	0001
0076	Πy	24	0077	0065
0077	Πz	05	0030	0061
0100	Πz	05	0031	0062
0101	Πz	05	0032	0063
0102	Πz	05	0033	0064
0103	Πz	05	0034	0070
0104	Πz	05	0012	0107
0105	Πz	05	0016	0113
0106	Πz	05	0010	0021
0107	Πz	05	0062	0071
0110	+	00	0020	0070
0111	Πy	74	----	0022
0112	x,	13	0065	0072
0113	Πy	24	0114	0041
0114	+	00	0002	0107
0115	+	00	0003	0113
0116	↓|-|,	11	0004	----
0117	YΠ	34	0107	0120
0120	Πz	05	0011	0021
0121	Πz	05	0036	0067
0122	:,	12	0005	0041
0123	Πy	24	0124	0066

0124	:,	12	0005	0043
0125	↓+	20	0066	0066
0126	:,	12	0007	0042
0127	↓+,	30	0066	----
0130	↓+	20	0061	0071
0131	:,	12	0006	0043
0132	↓+,	30	0042	----
0133	↓+	20	0063	0066
0134	+	00	0020	0070
0135	Πy	74	----	0022
0136	×	03	0065	0072
0137	↓+	20	0066	0060
0140	↓-,	31	0071	----
0141	↓|-|,	71	0003	----
0142	YΠ	34	0143	0155
0143	Πz	05	0042	0041
0144	Πz	05	0043	0042
0145	Πz	05	0072	0043
0146	Πz	05	0062	0061
0147	Πz	05	0063	0062
0150	Πz	05	0064	0063
0151	Πz	05	0060	0064
0152	Πy	74	----	β'
0153	-,	11	0070	0037
0154	YΠ	34	megáll	0121
0155	Πz	05	0060	0071
0156	-	01	0003	0067
0157	YΠ	34	0160	0135
0160	:,	12	0015	0020
0161	↓+	20	0070	0070
0162	×	03	0005	0061
0163	×	03	0006	0062

0164	×,	13	0005	0063
0165	↓+,	30	0062	----
0166	↓:,	32	0001	----
0167	↓-	21	0061	0061
0170	×,	03	0014	0062
0171	‖y	24	0172	0060
0172	‖z	05	0063	0062
0173	↓×,	33	0006	0063
0174	×,	13	0064	0005
0175	↓+,	30	0063	----
0176	↓:,	32	0001	----
0177	↓-	21	0060	0063
0200	×	03	0014	0020
0201	×	03	0014	0065
0202	‖y	74	----	0104

Milne módszer lebegőpontos programja.

Irjuk át az 1./, 21/ képletet

$$y^{(1)}_{n+1} = y_{n-3} + \frac{h}{3}\left(2^3 f_n - 2^2 f_{n-1} + 2^3 f_{n-2}\right).$$

$$y^{(r)}_{n+1} = \frac{h}{3} f^{(r-1)}_{n+1} + [\, y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(2^2 f_n + f_{n-1}\right)$$

alakba.

Pozícióelosztás.

Legyen az f/x,y/-t kiszámitó lebegőpontos szubrutin az α -tól α +k-1-ig terjedő pozíciókban s /α+ l/= y24-0075 legyen.

Legyen ebben a szubrutinban:

/o1oo/ = x = /o1o1/

/o1o2/ = y = /o1o3/

/2/ = f_n = /2+1/

/o340/= 74 y---- α

A lebegőpontos müveleteket lebegőpontos szubrutin végzi el mindenegyes lebegőpontos müveletnél erre ugrunk át.

Konstansok.

/ooo1/=	oo	oooo	ooo1
/ooo2/=	oo	oooo	ooo2
/ooo3/=	oo	oooo	ooo3
/ooo4/=	oo	oooo	ooo4
/ooo5/=	oo	ooo1	ooo1
/ooo6/=	oo	ooo6	ooo6
/ooo7/=	oo	ooo2	oooo
/oo1o/=	oo	ooo6	oooo
/oo11/=	oo	oooo	ooo6

/oo12/=			3	= /oo13/
/oo14/=	Tz	o5	P+1	oo6o
/oo15/=	Ty	74	----	o143
/oo16/=	Ty	74	----	o155
/oo17/=	Ty	74	----	o2o1
/oo2o/=	Ty	74	----	o214
/oo21/=	Ty	74	----	o274
/oo22/=	Tz	o5	oo72	oo7o
/oo23/=	Tz	o5	oo62	oo6o
/oo24/=	Ty	74	----	o333
/oo25/=	Ty	74	----	o311
/oo26/=	Tz	o5	oo32	oo62
/oo27/=	Tz	o5	oo42	oo72
/oo3o/=	Ty	74	----	o12o
/oo31/=		o4	o1oo	o257

<u>Paraméterek:</u>

/oo32/= y_0=/oo33/
/oo34/= y_1=/oo35/
/oo36/=y_2=/oo37/
/oo4o/= y_3=/oo41/
/oo42/= h =/oo43/
/oo44/= $\frac{h}{3}$ = /oo45/
/oo46/= b = /oo47/
/oo5o/ =x_0=/oo51/
/oo76/= ε
/oo77/=/i-1/2^{-30}/iterációs szám/
/o345/= 74 Ty — α
/346/= $\frac{5}{8}$

<u>Munkapoziciók:</u>

/oo52/=f_{n-2}=/oo53/
/oo54/=f_{n-1}=/oo55/
/oo56/=f_n =/oo57/
/oo6o/=f_{n+1}=/oo61/
/oo62/=y_{n-3}=/oo63/
/oo64/=y_{n-2}=/oo65/
/oo66/=y_{n-1}=/oo67/
/oo7o/=y_n = /oo71/
/oo72/
oo73
oo74
oo75

Program

0104	Пz	05	0050	0100
0105	Пz	05	0051	0101
0106	Пz	05	0031	
0107	Пz	05	0032	0062
0110	+	00	0005	0107
0111	↓1-1,	71	0027	----
0112	УП	34	0107	0113
0113	Пz	05	0026	0107
0114	Пz	05	0030	0075
0115	Пz	05	0065	0103
0116	Пz	05	0064	0102
0117	Пy	74	----	0135
0120	Пz	05	P	0052
0121	Пz	05	P+1	0053
0122	+	00	0007	0115
0123	+	00	0007	0116
0124	+	00	0002	0120
0125	+	00	0002	0121
0126	↓1-1,	71	0014	----
0127	УП	34	0115	0130
0130	–	01	0010	0115
0131	–	01	0010	0116
0132	–	01	0011	0120
0133	–	01	0011	0121
0134	Пy	74	----	0146
0135	Пz	05	0015	v4 ℓ
0136	Пz	05	0101	P+1
0137	Пz	05	0100	P
0140	Пz	05	0043	Q+1

0141	Пz	05	0042	Q
0142	Пу	74	----	u
0143	Пz	05	P	0100
0144	Пz	05	P+1	0101
0145	Пу	74	----	0345
0146	Пz	05	0020	0075
0147	Пz	05	0077	0072
0150	+	00	0003	P+1
0151	Пz	05	0052	
0152	Пz	05	0016	V+l
0153	+,	10	0003	0053
0154	Пу	24	u	Q+1
0155	Пz	05	0054	Q
0156	+	00	0004	V+l
0157	+,	10	0002	0055
0160	Пу	24	q	Q+1
0161	+	00	0045	P+1
0162	×	03	0044	P
0163	+	00	0004	V+l
0164	Пу	74	----	V
0165	Пz	05	0062	Q
0166	Пz	05	0063	Q+1
0167	+	00	0004	V+1
0170	Пу	74	----	u
0171	Пz	05	P	0102
0172	Пz	05	P+1	0103
0173	Пz	05	0054	P
0174	Пz	05	0055	P+1
0175	Пz	05	0056	Q
0176	Пz	05	0017	V+l
0177	+,	10	0002	0057

0200	Пу	24	u	Q+1
0201	+	00	0045	P+1
0202	×	03	0044	P
0203	+	00	0004	V+ l.
0204	Пу	74	----	V
0205	Пτ	05	0066	Q
0206	Пτ	05	0067	Q+1
0207	+	00	0004	V+ l.
0210	Пу	74	----	u
0211	Пτ	05	P	0074
0212	Пτ.	05	P+1	0073
0213	Пу	74	----	0135
0214	Пτ	05	P	0060
0215	Пτ.	05	P+1	0061
0216	+	00	0045	P+1
0217	×	03	0044	P
0220	+,	10	0011	0020
0221	Пу	24	V	V+ l.
0222	Пτ	05	0074	Q
0223	Пτ	05	0073	Q+1
0224	+	00	0004	V
0225	Пу	74	----	u
0226	−,	11	P+1	0103
0227	↓|−|,	71	0001	----
0230	УП	34	0231	0234
0231	−,	11	P	0102
0232	↓|−|,	71	0001	----
0233	УП	34	0240	0234
0234	Пτ	05	P	0102
0235	Пτ	05	P+1	0103
0236	−	01	0001	0072
0237	УП	34	0265	0345

0240	Пz	05	0064	0062
0241	+	00	0005	0240
0242	↓l-1,	71	0022	----
0243	YП	34	0240	0244
0244	Пz	05	P	0070
0245	Пz	05	P+1	0071
0246	−	01	0006	0240
0247	Пz	05	0054	0052
0250	+	00	0005	0247
0251	↓l-1,	71	0023	----
0252	YП	34	0247	0253
0253	−	01	0006	0247
0254	Пz	05	0056	P
0255	Пz	05	0057	P+1
0256	Пy	74	----	B'
0257	−,	10	0101	0047
0260	↓l-1,	71	0001	----
0261	YП	34	0262	0147
0262	−,	11	0046	0100
0263	↓l-1,	71	0001	----
0264	YП	34	megáll	0147
0265	Пz	05	0064	P
0266	Пz	05	0066	Q
0267	−,	11	0002	0065
0270	Пy	24	0271	P+1
0271	Пz	05	0021	v+ℓ
0272	−,	10	0003	0067
0273	Пy	24	u	Q+1

0274	×	03	0012	P
0275	+	00	0013	P+1
0276	+	00	0004	V+l
0277	Пу	74	----	V
0300	Пz	05	0062	Q
0301	+	00	0004	V+l
0302	+,	10	0003	0063
0303	Пу	24	V	Q+1
0304	Пz	05	P	0062
0305	Пz	05	P+1	0063
0306	Пz	05	0066	P
0307	Пz	05	0070	Q
0310	+,	10	0002	0067
0311	Пу	24	0312	P+1
0312	Пz	05	0344	V+l
0313	−,	11	0003	0071
0314	Пу	24	u	Q+1
0315	Пz	05	0064	Q
0316	Пz	05	0066	0064
0317	−,	11	0003	0065
0320	Пу	24	0274	Q+1
0321	+	00	0002	V+l
0322	Пу	74	----	q
0323	Пz	05	0067	0065
0324	Пz	05	P	0066
0325	Пz	05	P+1	0067
0326	−,	11	0042	0000
0327	↓×	23	0346	P
0330	Пz	05	0024	V+l
0331	+,	10	0013	0043
0332	Пу	24	V	P+1

0333	Пz	05	0100	Q
0334	Пz	05	0101	Q+1
0335	+	00	0004	v+l
0336	Пy	74	----	n
0337	Пz	05	P	0100
0340	Пz	05	P+1	0101
0341	−	01	0001	0043
0342	−	01	0001	0045
0343	Пy	74	----	0114
0344	Пy	74	----	0315

Készitette: Szelezsán János
Ellenőrizte: Veidinger László

II.5. **Lebegőpontos program az $y^{n}=f(x,y,y',\ldots,y^{n-1})$ n-edrendű differenciálegyenlet Runge-Kutta módszerrel történő numerikus integrálására.**

Az $y(x_0) = y_\nu^{(\nu)}$ $(\nu = 0,1,\ldots,n)$ kezdeti feltétellel adott

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \qquad 1.$$

n-edrendű differenciálegyenletet elsőrendű differenciálegyenletrendszerré irhatjuk át.

Vezessük be a következő függvényeket:

$y=\varphi_0$, $y'=\varphi_1$, $y''=\varphi_2$,...,$y^{(n-1)}=\varphi_{n-1}$

Igy: $\varphi_0' = \varphi_1$; $\varphi_1' = \varphi_2 \ldots y^{(n)} = \varphi_{n-1}' = f(x, \ldots \varphi_{n-1})$
tehát egy - az /1/-el ekvivalens - n egyenletből álló elsőrendű differenciál egyenletrendszerhez jutunk, amely formálisan

$$\underline{Y}'(\varphi_0', \ldots \varphi_{n-1}') = \underline{F}(\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}, f)$$

vektoriális alakban irható fel.

Az igy keletkező rendszert ugy oldhatjuk meg, hogy egyenletenként alkalmazzuk az elsőrendű differenciálegyenletre vonatkozó Runge-Kutta módszert. Felhasználva az elsőrendű differenciálegyenlet megoldására szolgáló Runge-Kutta sémát, készitsük el a rendszer megoldási sémáját.

x	$\underline{Y}(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$	$\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \underline{k}_4$
x_{l-1}	$y_{0\,l-1}$ $y_{1\,l-1}$ $\vdots$ $y_{n-1\,l-1}$	$h\, y_{1\,l-1} = k_{11}$ $h\, y_{2\,l-1} = k_{12}$ $\vdots$ $h\, y'_{n-1} = h f(x, y_{0\,l-1}, \dots, y_{n-1\,l-1}) = k_{1n}$ $\underline{k}_1 = [k_{11}, \dots, k_{1n}]$
$x_{l-1} + \frac{h}{2}$	$y_{0\,l-1} + \frac{1}{2} k_{11}$ $y_{1\,l-1} + \frac{1}{2} k_{12}$ $\vdots$ $y_{n-1\,l-1} + \frac{1}{2} k_{1n}$	$h(y_{1\,l-1} + \frac{1}{2} k_{12}) = k_{21}$ $\vdots$ $h\, y'_{n-1} = h f(x_{l-1} + \frac{h}{2}, y_{0\,l-1} + \frac{1}{2} k_{11}, \dots, y_{n-1\,l-1} + \frac{1}{2} k_{1n}) = k_{2n}$ $\underline{k}_2 = [k_{21}, \dots, k_{2n}]$
$x_{l-1} + \frac{h}{2}$	$y_{0\,l-1} + \frac{1}{2} k_{21}$ $\vdots$ $y_{n-1\,l-1} + \frac{1}{2} k_{2n}$	$h(y_{1\,l-1} + \frac{1}{2} k_{22}) = k_{31}$ $\vdots$ $h\, y'_{n-1} = h f(x_{l-1} + \frac{h}{2}, y_{0\,l-1} + \frac{1}{2} k_{21}, \dots, y_{n-1,\,l-1} + \frac{1}{2} k_{2n}) = k_{3n}$ $\underline{k}_3 = [k_{31}, \dots, k_{3n}]$
$x_{l-1} + h$	$y_{0\,l-1} + \frac{1}{2} k_{31}$ $\vdots$ $y_{n-1\,l-1} + \frac{1}{2} k_{3n}$	$h(y_{1\,l-1} + \frac{1}{2} k_{32}) = k_{41}$ $\vdots$ $h\, y'_{n-1} = h f(x_{l-1} + h;\ y_{0\,l-1} + \frac{1}{2} k_{31};\ \dots,\ y_{n-1,\,l-1} + \frac{1}{2} k_{3n}) = k_{4n}$ $\underline{k}_4 = [k_{41}, \dots, k_{4n}]$
x_l	$y_{0\,l-1} + \frac{1}{2} k_1 = y_{0l} = y_1$ $\vdots$ $y_{n-1\,l-1} + \frac{1}{2} k_n = y_{n-1\,l} = y_1^{(n-1)}$	ahol $\underline{k} = \underline{k}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{1}{6}(\underline{k}_1 + 2\underline{k}_2 + 2\underline{k}_3 + \underline{k}_4)$

A lépésköz megválasztása ugyanugy, mint az elsőrendü esetben a

$$\frac{|k_{2i} - k_{3i}|}{|k_{1i} - k_{2i}|} < \varepsilon \quad \text{egyenlőtlenség}$$

vizsgálatával történik ($i=1,2,\dots,n$) / ε egy előre megadott szám $\approx \frac{4}{100}$/. Ha az egyenlőtlenség nem teljesül, akkor felezzük a lépésközt és ezzel a lépésközzel számolunk tovább.

Pozicióelosztás.

Legyen az $f/x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$/-t kiszámitó szubrutin az A-tól A+k-1-ig terjedő poziciókban elhelyezve s(A+k)=74 /y — oo26 legyen. Legyen ebben a szubrutinban

x helye /o13o//0131,/

φ_i helye /o132+2i,o133+2i/ ($i=0,1,\dots$)

$\varphi'_{n-1}=f/x, \xi_1, \xi_{n-1}$) helye /P,P+1/

A lebegőpontos müveleteket a lebegőpontos szubrutin végzi el mindenegyes lebegőpontos müveletnél erre ugrunk át.

Legyen:

1./ az összeadó szubrutin a p-től $p+l_1$-ig

2./ a kivonó szubrutin q-tól $q+l_2$-ig

3./ a szorzó szubrutin r-től $r+l_3$-ig

4./ az osztó szubrutin s-től $s+l_4$-ig

5./ a normalizáló szubrutin v-től $v+l$-ig terjedő poziciókban elhelyezve s /v+l/=ly-z / z az a pozició, ahova a normalizálás után a vezérlést átadjuk./

Ha $x=d_1 2^{p1}$ $y=d_2 2^{p2}$

akkor ebben a szubrutinban legyen

/P/=d_1 /Q=P+2/=d_2

/P+1/=p_1 /Q+1/=p_2

A normalizált eredmény mindig /P,P+1/-ben adódik/ $\frac{x}{y}$, x-y,x+y,x.y/.

<u>Konstansok</u>

/0001/=00		0000	0001
/0002/=00		0001	0000
/0003/=00		0002	0000
/0004/=00		0000	0002
/0005/=00		0000	0005
/0006/=00		0000	0004
/0007/= $\frac{1}{6}$ =		/0010/	
/0011/=00		0002	0002
/0012/==$^{-12}$			
/0013/=04		0130	0447
/0014/=74	Πγ	----	0330
/0015/=00	+	0000	.0006
/0016/=05	Πτ	0570	P
/0017/=05	Πτ	0571	P+1
/0020/=74	Πγ	----	0300
/0021/-74	Πγ	----	0317
/0022/=74	Πγ	----	0326
/0023/05	Πτ	0132	P
/0024/=74	Πγ	----	0330
/0025/=21	↓ -	0001	P+1

/0026/=74	$\pi\gamma$	----	0303
/0027/=74	$\pi\gamma$	----	0404
/0030/=24	$\pi\gamma$	0232	0132
/0031/=10	$+,$	0061	0571
/0032/=05	$\pi\tau$	P	0102
/0033/=74	$\pi\gamma$	----	0473
/0034/=74	$\pi\gamma$	----	0525
/0035/=74		0000	0334/-/05 Q 0132/
/0036/=00		0004	0005
/0037/=34	$\gamma\pi$	0336	0345
/0270/=05	$\pi\tau$	P	0566
/0271/=05	$\pi\tau$	P+1	0567

Paraméterek.

/0040/= h =/0041/

/0040/= $\frac{h}{2}$ =/0042/

/0043/= $2n \cdot 2^{-30}$

/0044/=74 $\pi\gamma$ =A

/0045/= b =/0046/

/0047/= $^{2}\log \varepsilon$

/0200,0201/=x_0

/0202,0203/= $\varphi_{00}=y_0$

/0204,0205/= $\varphi_{10}=y_0'$

/0206,0207/= $\varphi_{20}=y_0''$

:

/0200+2n-2,0201+2n-2/= $\varphi_{n-10}=y_0^{/n-1/}$

Munkapozíciók

0050	0057	0100-0127
0051	0060	0570-0670
0052	0061	
0053	0062	
0054	0063	
0055	0064	
0056	0065	

Program

0230	12	:,	0012	0043	
0231	24	Пу	[illegible]32	0050	/00 2n 0000/
0232	20	↓+	0004	0056	/00 2n 0002/
0233	21	↓-	0011	0051	/00 2n-2 0000/
0234	11	-,	0004	0043	
0235	24	Пу	0236	0052	/00 0000 2n-2/
0236	20	↓+	0030	0055	/ 0271 0132+2n-2/
0237	10	+,	0043	0043	
0240	24	Пу	0241	0053	/00 0000 4n/
0241	21	↓-	0004	0065	/00 0000 4n-2/
0242	10	+,	0050	0043	
0243	24	Пу	0244	0054	/00 2n 2n/
0244	10	+,	0043	0031	
0245	24	Пу	0246	0057	/+,0061 0051+ 2n/
0246	05	Пч	0200	0130	
0247	05	Пч	0201	0131	
0250	05	Пч	0202	0100	
0251	24	Пу	0252	0132	
0252	05	Пч	0203	0101	
0253	24	Пу	0254	0133	
0254	00	+	0011	0250	
0255	00	+	0011	0252	
0256	00	+	0004	0251	
0257	00	+	0004	0253	
0260	11	-,	0251	0055	
0261	34	УП	0262	0250	

0262	01	−	0054	0250
0263	01	−	0054	0 52
0264	01	−	0043	0251
0265	01	−	0043	0253
0266	05	Пч	0044	0302
0267	74	Пу	----	0302
----	--		----	----
0272	05	Пч	0040	Q
0273	05	Пч	0042	Q+1
0274	05	Пч	0130	P
0275	05	Пч	0131	P+1
0276	05	Пч	0020	$v+l$
0277	74	Пу	----	v
0300	05	Пч	P	0130
0301	05	Пч	P+1	0131
0302	(----		------	----)
0303	00	+	0052	0332
0304	00	+	0052	0333
0305	00	+	0051	0322
0306	00	+	0051	0323
0307	00	+	0051	0330
0310	00	+	0051	0331
0311	00	+	0004	0317
0312	00	+	0004	0320
0313	03	×	0040	P
0314	00	∓	0041	P+1
0315	05	Пч	0021	$v+l$.
0316	74	Пу	----	v.
0317	05	Пч	P	0566
0320	05	Пч	P+1	0567

```
0321  21  ↓ −   0001      P+1
0322  05 ( П̄ч   /0100+2n-2 Q/  )
0323  05   П̄ч   0101+2n-2 Q+1/
0324  05   П̄ч   0022
0325  74   П̄у   ----
0326  05   П̄ч   P         Q
0327  05   П̄ч   P+1       Q+1
0330  05 ( П̄ч   0132+2n-2          P   )
0331  05 ( П̄ч   0133+2n-2+1        P+1 )
0332  05   П̄ч   Q         0132+/2n-2/
0333  05   П̄ч   Q+1       0133+/2n-2/
0334  11   −,   0330      0023
0335  34   УП̄   0336      0345
0336  01   −    0003      0322
0337  01   −    0003      0323
0340  01   −    0004      0332
0341  01   −    0004      0333
0342  01   −    0003      0330
0343  01   −    0003      0331
0344  74   П̄у   ----      0311
0345  00   +    0004      0335
0346  74   П̄у   ----      0272
0347  05   П̄ч   0014      0321
0350  00   +    0005      0335
0351  74   П̄у   ----      0302
0352  05   П̄ч   0024      0321
0353  00   +    0006      0026
0354  00   +    0035      0332
```

0355	00	+	0036	0335
0356	74	Пу	----	0272
0357	05	Пч	0025	0321
0360	01	−	0006	0026
0361	01	−	0035	0332
0362	05	Пч	0037	0335
0363	74	Пу	----	0455
0364	00	+	0051	0417
0365	00	+	0051	0420
0366	00	+	0052	0423
0367	00	+	0052	0424
0370	00	+	0052	0425
0371	00	+	0052	0426
0372	05	Пч	0057	0402
0373	05	Пч	0001	0061
0374	05	Пч	0027	v+l
0375	05	Пч	0570	P
0376	05	Пч	0371	P+1
0377	10	+,	0056	0375
0400	24	Пу	0401	0401
0401	(••		••••	••••)
0402	10	+,	0061	0571+2n/
0403	24	Пу	P	Q+1
0404	00	+	0050	0401
0405	00	+	0043	0402
0406	00	+	0006	v+l
0407	74	Пу	----	0401
0410	05	Пч	0000	0061
0411	01	−	0001	v+l

o412	74	Πy	----	o4o4	
o413	o3	x	oolo	P	
o414	oo	+	ooo7	P+1	
o415	oo	+	ooo6	+	
o416	74	Πy	----		
o417	o5	Πч	oloo+2n-2		Q
o42o	o5	Πч	olol+2n-2		Q+1
o421	oo	+	ooo6	+	
o422	74	Πy	----	P	
o423	(o5		P	oloo+2n-2/	
o424	(24		o425	o132+2n-2/	
o425	o5	Πч	P+1	0101+2n-2	
o426	24	Πy	o427	o133+2n-2	
o427	11	-,	oo32	o423	
o43o	34	yΠ	o431	o443	
o431	o1	-	ooo3	o317	
o432	o1	-	ooo3	o42o	
o433	o1	-	ooo4	o423	
o434	o1	-	ooo4	o424	
o435	o1	-	ooo4	o425	
o436	o1	-	ooo4	o426	
o437	oo	+	ooo3	o375	
o44o	oo	+	ooo3	o376	
o441	o1	-	oo65	o4o2	
o442	74	Πy	----	o373	
o443	o1	-	oo51	o375	
o444	o1	-	oo51	o376	
o445	o5	Πч	oo13	β	konvertálás és
o446	74	Πy	----	β'	kinyomtatás

0447	11	−,	0131	0045	
0450	71	↓|-|,	0001	----	
0451	34	γ π̄	0302	0452	
0452	11	−,	0132	0046	
0453	71	↓|-|,	0001	----	
0454	34	γ π̄	0302	megáll	
0455	10	+,	0051	0052	
0456	20	↓+	0531	0064	
0457	10	+,	0051	0463	
0460	24	π̄γ	0461	0063	
0461	05	π̄¬	0570	P	
0462	05	π̄¬	0571	P+1	
0463	10	+,	0056	0461	
0464	24	π̄γ	0465	0467	
0465	10	+,	0056	0462	
0466	24	π̄γ	0467	0470	
0467	/	..	....	....	/
0470	/	..	....	....	/
0471	05	π̄¬	0033	v+l	
0472	74	π̄γ	----	q	
0473	05	π̄¬	P	0060	
0474	05	π̄¬	P+1	0061	
0475	00	+	0050	0461	
0476	00	+	0050	0462	
0477	00	+	0015	0033	
0500	74	π̄γ	----	0461	
0501	00	+	0047	0061	
0502	01	−	0061	P+1	
0503	71	↓|-|,	0001	----	

0504	34	УП	0505	0507
0505	51	I-I,	0060	P
0506	24	ПУ	0510	----
0507	05	ПЧ	P+1	P+1
0510	34	УП	0511	0521
0511	01	-	0051	0461
0512	01	-	0051	0462
0513	01	-	0015	0033
0514	11	-,	0461	0063
0515	34	УП	0516	0461
0516	01	-	0050	0461
0517	01	-	0050	0462
0520	74	ПУ	----	0364
0521	01	-	0004	0277
0522	05	ПЧ	0034	0302
0523	01	-	0002	0273
0524	74	ПУ	----	0272
0525	00	+	0002	0273
0526	00	+	0004	0277
0527	01	-	0001	0041
0530	01	-	0001	0042
0531	05	ПЧ	0100	0132
0532	05	ПЧ	0101	0133
0533	00	+	0011	0531
0534	00	+	0011	0532
0535	11	-,	0531	0064
0536	34	УП	0537	0531
0537	01	-	0054	0531
0540	01	-	0054	053[illegible]

0541	01	–	0270	0033
0542	05	тч	0271	0317
0543	05	тч	0017	0320
0544	74	ту	----	0266

III. fejezet.

Közönséges lineáris differenciálegyenletrendszerek numerikus integrálási módszereinek vizsgálata az M-3 elektronikus számológépre való programozás szempontjából.

Közönséges lineáris differenciálegyenletrendszerek numerikus integrálási módszereinek vizsgálata az M-3 elektronikus számológépre való programozás szempontjából.

Készitette: Szelczsán János
Ellenőrizte: Sándor Ferenc

1./ Cauchy-féle normálalakban adott differenciálegyenletrendszerek.

Legyen adva a

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1/t,y_1,y_2,\dots,y_m/$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2/t,y_1,y_2,\dots,y_m/ \qquad 1/$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_m}{dt} = f_m/t,y_1,y_2,\dots y_m/$$

u.n. Cauchy féle differenciálegyenletrendszer az

$y_1/t_o/=y_{1o}$; $y_2/t_o/=y_{2o},\dots,$ $y_m/t_o/y_{mo}$ kezdeti feltételekkel, ahol $f_1,f_2,\dots f_m$ a $t,y_1,\dots y_m$ változók ismert függvényei.

Célszerü 1/-ben a t független változót is függő változónak tekinteni, s az $y_{m+1}=t$ jelölés bevezetésével hozzávenni 1/-hez a

$$\frac{dy_{m+1}}{dt} = 1 \text{ egyenletet is.}$$

Igy a

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1/y_1,\dots,y_n/ \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n/y_1,\dots,y_n/ \end{aligned}\right\} \quad 1^{*}/$$

rendszerhez jutunk,

ahol

$$n = m+1$$

$$y_n = t$$

$$f_n/y,\dots,y_n/=1$$

A 2./ feltétellel adott 1^{*}/ differenciálegyenletrendszer numerikus integrálása a közönséges elsőrendű differenciálegyenletek numerikus integrálására vonatkozó ismert módszerek bármelyikével elvégezhető, mégpedig ugy, hogy az adott módszert a rendszer minden egyes egyenletére egyszerre alkalmazzuk.

Legalkalmasabbnak látszik a Runge-Kutta módszer.

Irjuk fel az 1^{*}/ rendszert vektoralakban:

$$\frac{d\underline{Y}}{dt} = \underline{F}$$

ahol:

$$\frac{dY}{dt} = \left[\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt}\right]$$

és

$$\underline{F} = \left[f_1/y_1,\ldots,y_n/,\ldots,f_n/y_1,\ldots,y_n/\right].$$

A kezdeti feltétel így:

$$\underline{Y}/t_0/=\underline{Y}_o = \left[y_{1o},\ldots,y_{no}\right]$$

Mint ismeretes, az $y'=f/x,y/$ elsőrendű differenciálegyenletnek Runge-Kutta módszerrel való megoldása a

$y_{i+1}= y_i+\Delta y_i$ képlet alapján történik, ahol

$y_i \approx y/x_i/$; $x_i=x_{i-1}+h$ és $h = \frac{b-a}{n}$ a lépésköz /n az osztópontok száma/.

$$\Delta y_i= \frac{1}{6} /K_1+2K_2+2K_3+K_4/$$

és
$$K_1 = hf/x_i y_i/$$
$$K_2 = hf/x_i+ \frac{h}{2}, y_i+ \frac{1}{2} K_1/$$
$$K_3 = hf/x_i+ \frac{h}{2}; y_i+ \frac{1}{2} K_2/$$
$$K_4 = hf/x_i+h; y_i+ K_3 /$$

Ha Y_p-vel jelöljük az $\underline{Y}_p=\left[y_{1p},\ldots,y_{np}\right]$ vektort, ahol $y_{ip} \approx y_i/t_p/$

A 2/ vektoregyenletre alkalmazva a Runge-Kutta módszert, a következő képlethez jutunk.

$$\underline{Y}_{p+1}= \underline{Y}_p+ \Delta \underline{Y}_p$$

ahol

$$\Delta \underline{Y}_p = \frac{1}{6} / \underline{K}_1 + 2\underline{K}_2 + 2\underline{K}_3 + \underline{K}_4 /$$

és

$$\underline{K}_1 = \left[K_{11}, K_{21}, \dots, K_{n1}\right] = h\underline{F} / \underline{Y}_p /$$

$$\underline{K}_2 = \left[K_{12}, \dots, K_{n2}\right] = h\underline{F} / \underline{Y} + \frac{1}{2} \underline{K}_1 /$$

$$\underline{K}_3 = \left[K_{13}, \dots, K_{n3}\right] = h\underline{F} / \underline{Y} + \frac{1}{2} \underline{K}_2$$

$$\underline{K}_4 = \left[K_{14}, \dots, K_{n4}\right] = h\underline{F} / \underline{Y} + \underline{K}_3 / .$$

Ha ezeket a vektoregyenleteket komponenseikre írjuk át a következő képletekhez jutunk:

$$y_{i,p+1} = y_{ip} + \Delta y_{ip}$$

$$\Delta y_{ip} = \frac{1}{6} / K_{i1} + 2K_{i2} + 2K_{i3} + K_{i4} /$$

s $K_{i1} = hf_i / y_{1p}, y_{2p}, \dots, y_{np} /$

$$K_{i2} = hf_i / y_{1p} + \frac{K_{11}}{2}; y_{2p} + \frac{K_{21}}{2}, \dots, y_{np} + \frac{K_{n1}}{2} /$$

$$K_{i3} = hF_i / y_{1p} + \frac{K_{12}}{2}, \dots, y_{np} + \frac{K_{n2}}{2}$$

$$K_{i4} = hf_i / y_{1p} + K_{13}, \dots, y_{np} + K_{n3} /$$

Legyen γ egy ciklikusan változó mennyiség, amelynek értékei: 1,1, 2,2, 1,1, ... s jelöljük γ s-edik értékét γ_s-el.

Bevezetve a $\sigma_s = \frac{1}{3} \gamma_{s+1}$ /s=1,2,3,4/ mennyiségeket is, az előbbi formulákat a következő táblázat szerint célszerű programozni:

	0. lépés	első lépés	második lépés	harmadik lépés	negyedik lépés
s mennyiségek		$\gamma_1=1$	$\gamma_2=1$	$\gamma_3=2$	$\gamma_4=2$
s mennyiségek		$\sigma_1=\frac{1}{3}\gamma_2=\frac{1}{3}$	$\sigma_2=\frac{1}{3}\gamma_3=\frac{2}{3}$	$\sigma_3=\frac{1}{3}\gamma_4=\frac{2}{3}$	$\sigma_4=\frac{1}{3}\gamma_1$ (γ-ák periodicitása miatt)
Az f_i értékek /i=1,2,..n/ ki. számítása az előző lépésben nyert argumentum helyeken.		$f_i/y_{ip},\dots,y_{np}/$	$f_i/y_{ip}+\gamma_1\frac{K_{i1}}{2}$ $\dots,y_{np}+\gamma_1\frac{K_{n1}}{2}$	$f_i/y_{ip}+\gamma_2\frac{K_{i2}}{2},\dots,$ $y_{np}+\gamma_2\frac{K_{n2}}{2}/$	$f_i/y_{ip}+\gamma_3\frac{K_{i}}{2}$ $y_{np}+\gamma_3\frac{K_{n3}}{2}$
A K_{is} /i=1,2,3,4n s=1,2,3,4/ értékek előállítása.		$\frac{K_{i1}}{2}=\frac{h}{2}f_i$	$\frac{K_{i2}}{2}=\frac{h}{2}f_i$	$\frac{K_{i3}}{2}=\frac{h}{2}f_i$	$\frac{K_{i4}}{2}=\frac{h}{2}f_i$
A következő lépéshez szükséges argumentum értékek előállítása	y_{ip}	$y_{ip}+\ 1\frac{K_{i1}}{2}$	$y_{ip}+\ 2\frac{K_{i2}}{2}$	$y_{ip}+\ 3\frac{K_{i3}}{2}$	-
A résznövekmények előállítása		$\sigma_1\frac{K_{i1}}{2}$	$\sigma_2\frac{K_{i2}}{2}$	$\sigma_3\frac{K_{i3}}{2}$	$\sigma_4\frac{K_{i4}}{2}$
A résznövekmények hozzáadása az első függvényértékekhez, tehát y_{ip+1} előállítása.		$y_{ip}+\sigma_1\frac{K_{i1}}{2}$	$y_{ip}+\sigma_1\frac{K_{i1}}{2}+$ $\sigma_2\frac{K_{i2}}{2}$	$y_{ip}+\sigma_1\frac{K_{i1}}{2}+$ $+\sigma_2\frac{K_{i2}}{2}+$ $+\sigma_3\frac{K_{i3}}{2}$	$y_{ip}+\sigma_1\frac{K_{i1}}{2}+$ $+\sigma_2\frac{K_{i2}}{2}+$ $+\sigma_3\frac{K_{i3}}{2}+$ $+\sigma_4\frac{K_{i4}}{2}=$ $=y_{ip+1}$

A módszert lebegőponttal célszerű programozni, mivel általában sem a közbülső, sem a végeredményekre nem adható becslés.

Jelöljük ki a memóriában a következő egyenként 2n számú rekeszből álló rekeszcsoportokat.

A $D_0=\begin{Bmatrix} d_0+2i \\ d_0+1+2i \end{Bmatrix}$ $i=0,1,2,\ldots,n-1$

rekeszcsoportba helyezzük el az $\underline{Y}_0$ vektort.

Legyen a

$D_1=\begin{Bmatrix} d_1+2i \\ d_1+1+2i \end{Bmatrix}$ $i=0,1,2,\ldots,n-1$ rekeszcsoport az y_{ip} értékek helye. Ezeket az értékeket mindig vigyük át a

$D_2=\begin{Bmatrix} d_2+2i \\ d_2+1+2i \end{Bmatrix}$ $i=0,1,2,\ldots n-1$ rekeszcsoportba is, ezekből az értékekből számitjuk ugyanis ki az f_i függvények megfelelő argumentumait, amelyeket a

$D_3=\begin{Bmatrix} d_3+2i \\ d_3+1+2i \end{Bmatrix}$ $i=0,1,2,\ldots,n-1$ rekeszcsoportba helyezzük el. /Ez a rekeszcsoport tehát az f_i függvényeket kiszámitó szubrutinok közös bemenete is./

Legyen a

$D_4=\begin{Bmatrix} d_4+2i \\ d_4+2i+1 \end{Bmatrix}$ $i=0,1,2,\ldots n-1$ rekesztcsoport az f_i értékek helye, és az f_i értékek segitségével itt képezzük a $\frac{K_{is}}{2}$ értékeket is, Legyenek φ, ξ számlálórekeszek. A számítás végét a

$t_{p+1}=t_p+h \geqq b$ feltétel teljesülése jelzi, akkor a

gépet megállítjuk.

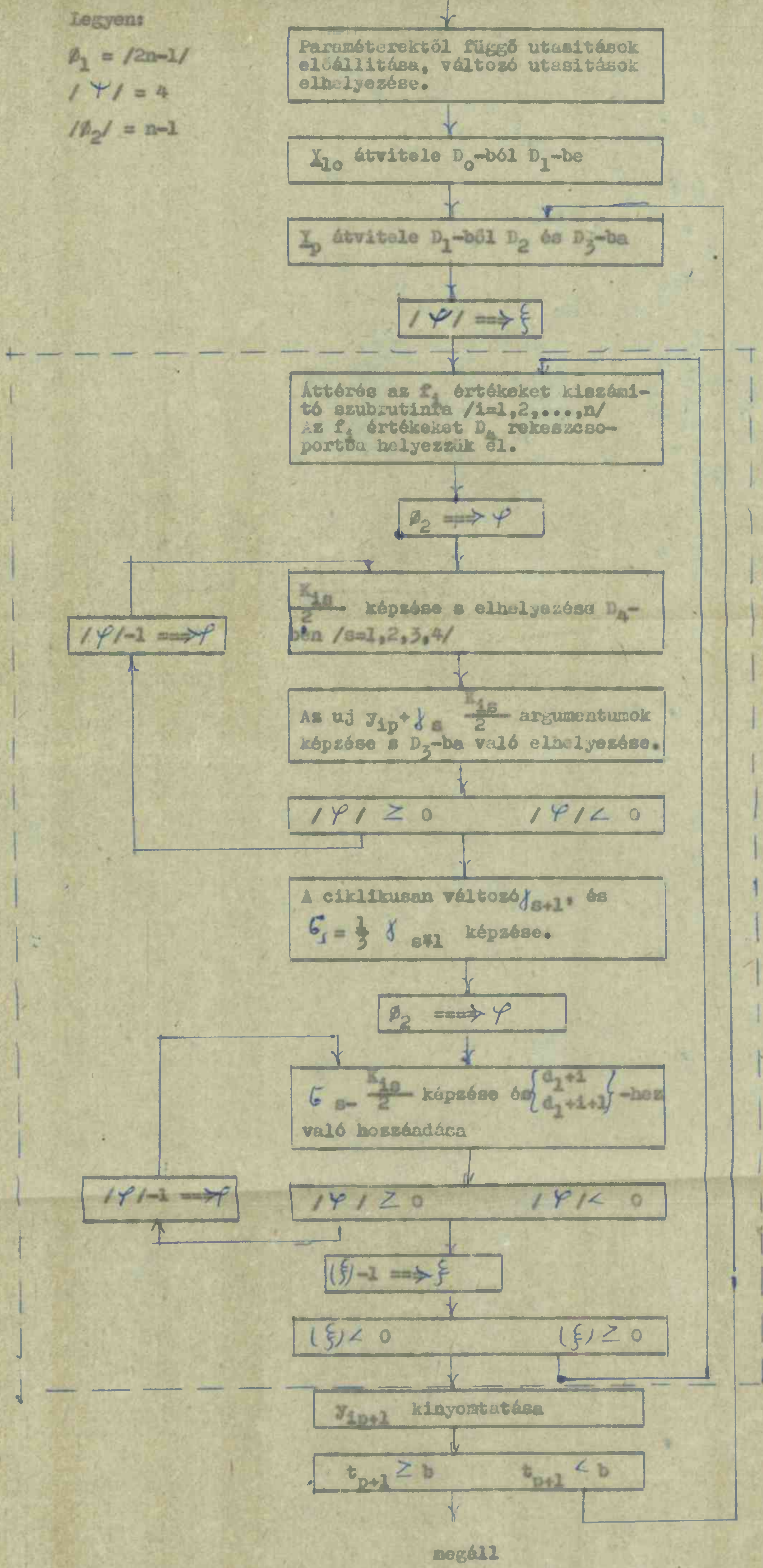
A számítás menetrendje.

Legyen:

$\emptyset_1 = /2n-1/$

$/\Psi/ = 4$

$/\emptyset_2/ = n-1$



– 1. logikai séma.

Az előbbi blokksóma alapján elkészitett program a számitás elején megválasztott h lépésközzel müködik. Elkészithető olyan program is, amely számitás közben automatikusan változtatja a lépésközt.

Automatikus lépésköz választás.

A lépésköz automatikus változtatásával a közelítés pontossága természetesen tetszőlegesen növelhető, de ez a végrehajtási idő lényeges megnöveléséhez vezet.

A lépésköz automatikus változtatása kétféleképpen történhet.

I. Adott h-val kiszámitjuk az y_{ip+1} mennyiségeket, jelöljük ezeket $y^{(h)}_{i,p+1}$ -val. Ezután felezzük a lépésközt, s kiszámitjuk y_i-t a $t_{p+\frac{h}{2}}$ helyen, majd ennek segitségével mint intervallum-kezdő értékkel kiszámitjuk $y_{i,p+1}$-et; jelöljük ezt $y^{(\frac{h}{2})}_{i,p+1}$-el. Összehasonlitjuk a két lépésen keresztül nyert $y^{(\frac{h}{2})}_{i,p+1}$ értékeket az egy lépéssel nyert $y^{(\frac{h}{2})}_{ip+1}$ értékekkel, azaz képezzük az

$$\left| y^{h}_{i,p+1} - y^{h/2}_{i,p+1} \right|$$ különbséget /i=1,2,...,n/

Ha $\left| y^{(h)}_{i,p+1} - y^{(\frac{h}{2})}_{i,p+1} \right| <$ ahol ε előre adott, /Általában $\varepsilon = 15\frac{\Delta}{N}$ ahol Δ a megengedett hiba, N a lépések száma / akkor

$y^{(\frac{h}{2})}_{i,p+1}$ -et fogadjuk el közelitő értékként,

s a számitást 2h lépésközzel folytatjuk tovább. Ha

$$\left| y^{h}_{i,p+1} - y^{\frac{h}{2}}_{p+1} \right| \geq \varepsilon .$$

akkor $\frac{h}{2}$ -et vesszük egész lépésköznek s az előző eljárást ezzel ismételjük meg.

II. A másik mód az, hogy minden lépésnél megvizsgáljuk, hogy az

$$\left| \frac{K_{12} - K_{13}}{K_{11} - K_{12}} \right| \leq \varepsilon \qquad /i = 1,2,\ldots,n/$$

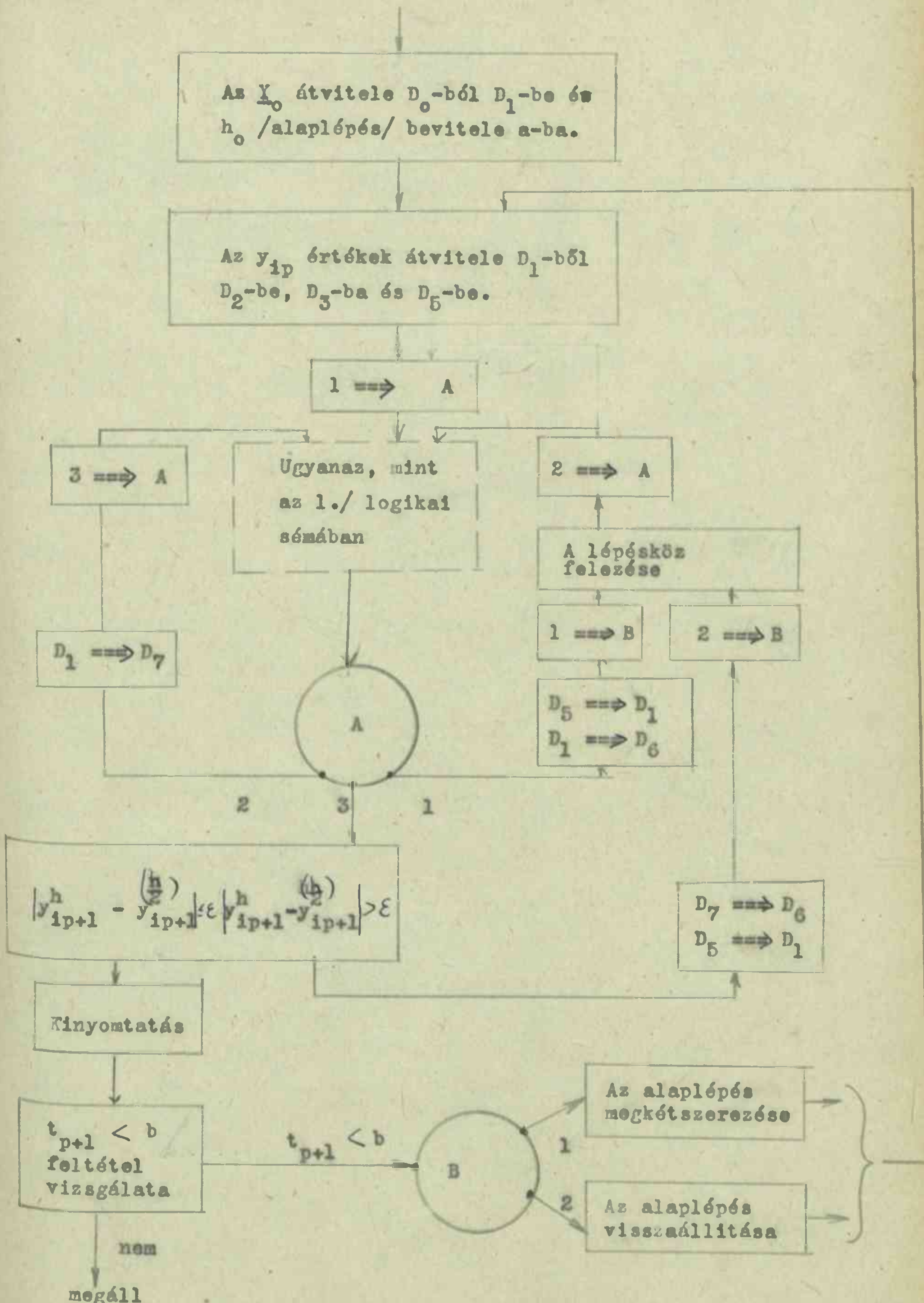
egyenlőség telejsül-e? / ε előre adott $\approx \frac{5}{100}$/

Ha teljesül, akkor elfogadjuk a h lépésközzel kiszámitott értéket. Ha nem teljesül az egyenlőtlenség, akkor a lépésközt felezzük s a felezett lépésközzel számitunk tovább.

Elkészitjük mindkét módszer vázlatos logikai sémáját.

Az első módszer logikai sémája.

Az 1/ - logikai séma szaggatott vonallal bekeretezett része változatlanul megmarad. Az ott kijelölt rekeszcsoportokhoz hozzá kell még venni a D_5, D_6, D_7 egyenként 2n rekeszből álló csoportokat is. Ezek tárolórekeszek; az eredeti s a felezéssel nyert értékeket tárolják.


Az X_o átvitele D_o-ból D_1-be és h_o /alaplépés/ bevitele a-ba.
Az y_{ip} értékek átvitele D_1-ből D_2-be, D_3-ba és D_5-be.
1 ⟹ A
3 ⟹ A
Ugyanaz, mint az 1./ logikai sémában
2 ⟹ A
A lépésköz felezése
1 ⟹ B
2 ⟹ B
$D_1 \Longrightarrow D_7$
$D_5 \Longrightarrow D_1$
$D_1 \Longrightarrow D_6$
A
2
3
1
$\left|y^{h}_{ip+1} - y^{(\frac{h}{2})}_{ip+1}\right| < \varepsilon$
$\left|y^{h}_{ip+1} - y^{(\frac{h}{2})}_{ip+1}\right| > \varepsilon$
$D_7 \Longrightarrow D_6$
$D_5 \Longrightarrow D_1$
Kinyomtatás
$t_{p+1} < b$ feltétel vizsgálata
$t_{p+1} < b$
B
1
2
Az alaplépés megkétszerezése
Az alaplépés visszaállítása
nem
megáll

II. A második módszer logikai sémája.

Jelöljük ki a memóriában a D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 rekeszcsoportokon kivül az ugyancsak 2n rekeszből álló D_5, D_6, D_7 rekeszcsoportokat is.

Az 1/ logikai sémában szaggatott vonallal bekeretezett rész csak abban változik, hogy a x-al jelölt helyen a következő blokk áll.

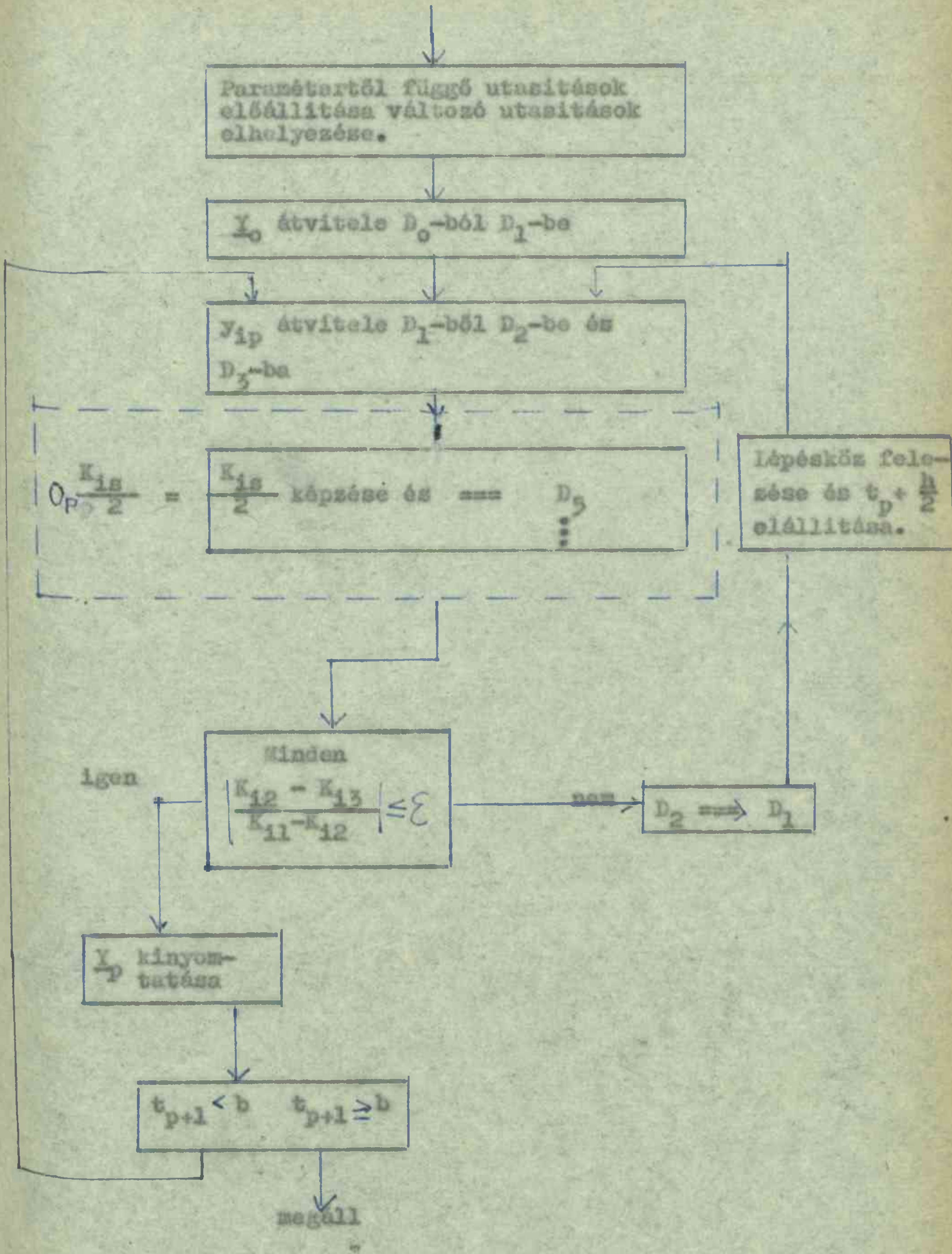
$O\frac{K_{is}}{P\;2} = \boxed{\frac{K_{is}}{2}}$ képzése és s=1 esetén D_5

s=2 " D_6

s=3 " D_7

s=4 " D_4, rekeszcsoportba való elhelyezése.

A logikai sémát lásd a következő oldalon.


Paramétertől függő utasitások előállitása változó utasitások elhelyezése.
$\underline{Y}_o$ átvitele D_o-ból D_1-be
y_{ip} átvitele D_1-ből D_2-be és D_3-ba
$O_P \frac{K_{is}}{2} = \frac{K_{is}}{2}$ képzése és $\Longrightarrow$ D_5
Lépésköz felezése és $t_p + \frac{h}{2}$ előállitása.
Minden $\left|\frac{K_{12} - K_{13}}{K_{11} - K_{12}}\right| \leq \varepsilon$
igen
nem
$D_2 \Longrightarrow D_1$
$\underline{Y}_p$ kinyomtatása
$t_{p+1} < b$ $t_{p+1} \geq b$
megáll

Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletrendszer.

Tekintsük a

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \qquad 1/$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n$$

állandó együtthatós homogén differenciálegyenletrendszert az

$x_1/_{t=o} = x_{1o}, \dots, x_n/_{t=o} = x_{no}$ kezdeti feltétellel.

Az $\underline{\underline{A}} = [a_{ij}]$, $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$

jelöléssel az egyenletrendszer

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \qquad \dots \quad 1^{*}$$

mátrix alakban is felírható s a kezdeti feltétel

$$\underline{x}\Big|_{t=o} = \begin{bmatrix} x_{1o} \\ \vdots \\ x_{no} \end{bmatrix} = \underline{x}_o \quad \text{alaku.}$$

Mint ismeretes 1^{*} megoldását

$$\underline{x} = e^{\underline{\underline{A}}t}\,\underline{x}_o \quad \text{alakban írhatjuk fel.}$$

Ismeretes, hogy a mátrix függvények kanonikus előállítására vonatkozó tételt felhasználva a 2/ megoldás, ha az $\underline{\underline{A}}$ minimál polinomjának gyökei egyszeresek

$$2^{*}\quad \underline{x} = e^{\underline{A}t}\underline{x}_0 = \sum_{k=1}^{s} e^{\lambda_k t}\left(\underline{U}_{k1}\underline{V}_{k1}^{*} + \dots + \underline{U}_{k\alpha_k}\underline{V}_{k}^{*}\gamma_k\right)\underline{x}_0$$

alakba irható fel, ahol

U_{ki}, V_{kj}^{*} vektorok az $\underline{A}$ mátrixnak λ_k saját-értékéhez tartozó jobb, ill. baloldali sajátvektorai ; γ_k a λ_k saját érték multiplicitása, s pedig a karakterisztikus polinom egymástól különböző gyökeinek száma.

A 2^{*}/ formula a következő lépésekben programozható.

1 Megállapitjuk, hogy a minimál-polinumok gyökei egyszeresek-e.

Megjegyzés: speciális $\underline{A}$ mátrixok esetén ez teljesül, pl: szimmetrikus hermiticus mátrixok esetén.

2) Kiszámitjuk az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeit jobb és baloldali saját vektorait.

Megjegyzés: speciális $\underline{A}$ mátrixokra ezek könnyen kaphatók.

Pl.:

a/ A

$$C_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \\ 0 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \cdot & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

kontinnuáns mátrix saját értékei

$$\lambda_k = 4\sin^2\frac{k\pi}{2/n+1/}$$

saját vektorai pedig:

$$u_k^{*} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\sin\frac{k\pi}{n+1} \quad \dots \quad \sin\frac{n k \pi}{n+1}\right]$$

alakuak.

b/ Egy $C(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ ciklikus

mátrix saját értékei

$$\lambda_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \qquad (k = 1, \ldots n-1)$$

saját vektorai

$$\underline{u}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_k^{*} = \underline{u}_k^{*} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[1, \bar{\lambda}_k, \ldots \bar{\lambda}_k^{-n-1}\right]$$

Általános $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait az ismert módszerek valamelyikével számítjuk ki.

3) Egy adott $t = t_i$-re elvégezzük a 2^{*} -ban lévő összegzést. Természetesen az ilyen tipusu rendszerre is alkalmazható az előbbi Runge-Kulta módszer, itt a jobboldalak egyszerű szerkezetűek. Viszont ha pl. nem a numerikus, hanem explicit megoldásra van szükségünk, ezzel a módszerrel ez is megadható.

Felhasznált irodalom

1. B.M.Kagan - T.M. Ter-Mikaeljan: Resenie inzsenernih zadacs na avtomaticseszkih cifrovih vicsiszlitelnih masinah. /GOSZENERGOIZDAD, 1958./

2. L.Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. /Springer Verlag, 1958/

3. Egerváry Jenő: Mátrix-függvények kanonikus előállitásáról és annak néhány alkalmazásáról. /MTA Mat.Fiz. Oszt.Közleményei. III.kötet.4.szám/

IV. fejezet.

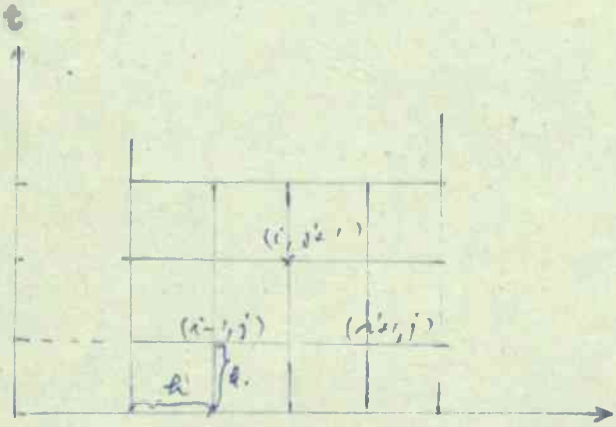
Egyes parciális differenciálegyenlettipusok numerikus integrálásának programjai.

Készítette: Szolcsán Ján[...]
Ellenőrizte: Veidinger Já[...]

1 A $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ parabolikus differenciálegyenlet numerikus

integrálása.

Keressük az 1) ábrán látható $R(a \le x \le b,\ 0 \le t \le d)$ tartományon a $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ differenciálegyenlet numerikus megoldását a tartomány bizonyos pontjaiban, ha a következő kezdő és perem-feltételek adottak.



$u/t,a/=\alpha/t/$

$u/t,b/=\beta/t/$

$u/0,x/=\varphi/x/$

Osszuk fel a tartományt h, illetve k oldalu derékszögü négyszögekre. Legyen az /a,b/ osztópontjainak száma végpontokkal együtt: n. Jelöljük az u megoldás közelítő értékét a P/x=a+ih/, y=jk/ pontban u_{ij}-vel.

A szereplő differenciálhányadosokat a megfelelő differencia-hányadosokkal helyettesítve /Lásd: Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen c. könyve: 248. old./ az:

$$u_{i,j+1} = \frac{k}{h^2}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right) + \left(1 - 2\frac{k}{h^2}\right) u_{ij}$$

képlethez jutunk.

Legyen: $k = \dfrac{h^2}{2}$, akkor

1) $u_{i,j+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right)$ $\quad u_{i,0} = \varphi_j$

1).

$u \ldots \varphi_j$

Ezt a képletet programozzuk be.

Tegyük fel, hogy $|x|<1$, $|t|<1$ s $|h| \le 0{,}1$ ./igy nyilván $|k| \le 0{,}1$/

Legyen ezenkivül

$$|f(t,x)|<1$$

$$|\varphi(x)|<1$$

Minthogy á s

$$|u_{i,j+1}| \le \left|\frac{u_{i-1,j}}{2}\right| + \left|\frac{u_{i+1,j}}{2}\right| \qquad s \qquad |u_{i,0}| = |\varphi_i| < 1$$

$(i = 0, 1, \ldots n-1)$

ezért tulcsordulás nem lép fel.

Poziciókiosztás

Legyenek a már kiszámitott $\varphi(a)$, $\varphi(a+1)$, $\ldots$ $\varphi(a+(n-1)k)$ értékek, a ξ -től $\xi+n-1$-ig terjedő poziciókban elhelyezve. /Ezeket külön program segitségével előzőleg kiszámitjuk/.

Legyen az $\alpha(t)$, $\beta(t)$ -t kiszámitó program az η -tól $\eta+l-1$ -ig terjedő poziciókban elhelyezve s

$(\eta+l) = \Pi\eta$ — 0074

/0031/= $\alpha(t)$ /0033/= t

/0032/= $\beta(t)$ legyen.

Konstansok

/0001/= $\frac{1}{2}$

/0002/= oo oooo ooo1

/0003/= o1 oo76 $\xi - 1$

/0004/= It 05 oo27 ξ

/0005/= x, 13 ooo1 ξ

/0006/= oo oooo ooo2

/0007/= It 05 oo32 ξ

/oo1o/= o1 oo76 ξ

Paraméterek

/oo15/= a

/oo16/= b

/oo17/= oo oooo oooh

/oo2o/= h

/ oo21/= $d+2^{-3o}$

Munkapozíciók

oo22,oo23,oo24,oo25,oo26,oo27

Program.

0040	+,	10	0010	0017				
0041	Πy	24	0042	0026	→	01	0076	$\xi+n$
0042	−,	11	0006	0017				
0043	Πy	24	0044	0025	→	00	0000	000$n-2$
0044	↓+	20	0004	0067	→	Πτ	0027	$\xi+n-2$
0045	−,	11	0002	0017				
0046	↓+	20	0007	0075	→	Πτ	0032	$\xi+n-1$
0047	+,	10	0017	0005				
0050	Πy	24	0051	0024	→	x,	0001	$\xi+n$
0051	x,	13	0020	0020				
0052	↓x	23	0001	0022				
0053	Πy	24	0054	0030				
0054	Πτ	05	0003	β				
0055	x,	13	0001	ξ				
0056	Πy	24	0057	0023				
0057	Πτ	05	0027	ξ				
0060	x,	13	0001	$\xi+2$				
0061	↓+	20	0023	0027				
0062	+	00	0002	0055				
0063	+	00	0002	0057				
0064	+	00	0002	0060				
0065	↓I−I,	71	0024	----				
0066	√Π	34	0055	0067				
0067	/			/				
0070	−	01	0025	0055				
0071	−	01	0025	0057				

oo72	–	01	oo25	oo6o
oo73	Пу	74	----	3.
oo74	Пс	05	oo31	ξ
oo75	/			/
oo76	+	00	ooo2	(3
oo77	⋃(-1,	71	oo26	—
oloo	УП	34	(3'	olol
olol	+	00	oo22	oo3o
olo2	⋃-,	31	oo21	----
olo3	УП	34	oo54	nogill

Cime: XY parabolikus differenciálegyenlet numerikus integrál

Átadta: Szelezsán János, 1958. junius 16.-án

Készült 1958. junius 18.-án 5 példányban
Gépelte

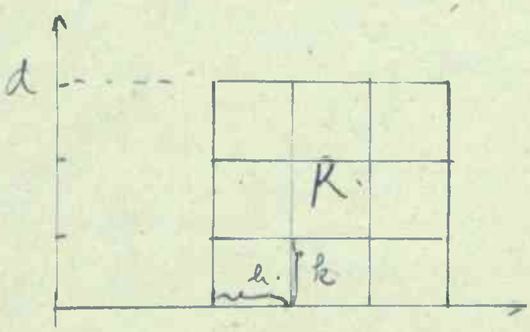
Kecskésné

Készítette: Szelzsán János
Ellenőrizte: Veidinger László

IV. 2. Az $U_{tt}=a^2U_{xx}$ hiperbolikus differenciálegyenlet numerikus integrálása

Keressük az 1. ábrán látható R /$a\le x\le b$; $o\le t\le d$/ tartományon az $U_{tt}=a^2U_{xx}$ differenciálegyenlet numerikus megoldását a tartomány bizonyos pontjaiban, ha a következő perem és kezdő feltételek adottak:

$u/t,a/=\alpha/t/$
$u/t,b/=\beta/t/$
$u/o,x/=\varphi/x/$
$u_t/o,x/=\psi/x/$



1.ábra

Osszuk fel a tartományt h, illetve k, oldalu derékszögű négyszögekkel /legyen az /a,b/ osztópontjainak száma végpontokkal együtt n/, jelöljük az u megoldást közelítő értékét a P/x=a+ih; y=jk/ pontban u_{ij}-vel. A másodrendű differenciálhányadosokat a megfelelő differenciahányadosokkal helyettesítve:

$$u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}=\frac{k^2a^2}{h^2}/u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}/$$ egyenlőséghez jutunk.

Legyen $h = ka$, így

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \qquad /1,1/ \quad /j>1./$$

Az első sor /j=1/ pontjaihoz tartozó közelitő értéket a következő módon nyerjük.

Ezekre a pontokra egyrészt:

1./ $u_{i1} = u_{i+1,0} + u_{i-1,0} - u_{i,-1}$ képlet érvényes /1,1/-nek megfelelően.

Másrészt:

2./ $\psi(x_i) = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(0,x_i)} \approx \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2h}$ lévén

1./-ből és 2./-ből $u_{i,-1}$-et kiküszöbölve

$$/1,2/ \qquad u_{i1} = \frac{u_{i+1,0} + u_{i-1,0}}{2} + h\psi_i \qquad /i=2,\dots,n-1/$$

képlethez jutunk.

A programozást /1,1/ ill./1,2/ alapján végezzük.

Mivel a gép fixponttal működik, ezért ügyelni kell arra, hogy a szereplő mennyiségek 1-nél abszolut értékben kisebbek legyenek.

Tegyük fel, hogy $|x|<1$; $|t|<1$ s legyen $h \le 0,1$.
/Ez $|x|<1$ miatt nem jelent lényeges megszorítást./

$$|\chi(t)| < \frac{1}{3}$$

$$|\varphi(x)| < \frac{1}{3}$$

$$|\psi(x)| < \frac{1}{3}$$

Így az első sor pontjaiba vett /j=1/ közelitőértékekre

$$|u_{i,1}| \le \left|\frac{u_{i+1,0}}{2}\right| + \left|\frac{u_{i-1,0}}{2}\right| + |h\psi_i| =$$

$$= \left|\frac{\varphi_{i+1,0}}{2}\right| + \left|\frac{\varphi_{i-1,0}}{2}\right| + |h\psi_i| \le \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{h}{3} < 1$$

Minthogy a következő sorokra

$|u_{i,j+1}| \leq |u_{i+1,j}| + |u_{i-1,j}| + |u_{i,j-1}|$.

ezért a következő módon járunk el.

Ha a j-edik sort kiszámítjuk, megvizsgáljuk, hogy $|u_{ij}| < \frac{1}{3}$ teljesül-e. /i=1,2,...,n/. Ha nem teljesül, akkor a szóbanforgó és az előtte lévő /j-1-ik/ sort 3-al szorozzuk, s kinyomtatáskor jelezzük /0,9999999 kinyomtatásával/, hogy az ezután következő megoldásértékek 3-al szorzandók.

Pozícióelosztás.

Legyen az $\frac{1}{2}\varphi(x)$ és $-h\psi(x)$-et kiszámító program /a kettőt összekapcsoljuk; miután $\frac{1}{2}\varphi(x)$-et kiszámítottuk, közvetlenül rátérünk $-h\psi(x)$ kiszámítására, s a vezérlést ezután adjuk át a vezérszubrutinnak./ az ε-tól $\varepsilon+k-1$-ig terjedő pozíciókban elhelyezve,

s /ε+k/ = 74 Пy − 0053

/0050/ = x legyen.

Az eredmény pozíciói

/0051/ = $\frac{1}{2}\varphi(x)$

/0052/ = $-h\psi(x)$

Legyen az α/t/, β/t/-t kiszámító program /ugyanúgy, mint az első esetben a két programot összekapcsoljuk/.

az η-tól $\eta+k_1-1$-ig terjedő pozíciókban, elhelyezve s

(η + k_1/ = 74 Пy − 0053

/0050/ = t legyen.

Az eredmény pozíciói itt is

/0051/ = α/t/

/0052/ = β/t/

Konstansok

/0001/=74 Пj 0151
/0002/=00 0000 0001
/0003/=2^{-12}
/0004/= + 00 0250 0250
/0005/= 00 + 0001 0001
/0006/= 74 Пj — 0205
/0007/=05 Пz 0051 0250
/0010/=00 0001 0000
/0011/=+, 10 0000 0002
/0012/=21 ↓- 0001 0001
/0013/= 00 7777 0000
/0014/= 71 ↓-1, 0000 0015
/0015/= $\frac{1}{3}$
/0016/=$\frac{1}{3}2^{-30}$
/0017/=00 7777 0216
/0020/=x 03 0015 0250
/0021/= 01 0247 0161
/0022/= 00 0002 0002
/0023/=+ 9999999

Paraméterek.

/0025/= a
/0026/= $b+2^{-30}$
/0027/= h
/0030/= $\frac{h}{a}$
/0031/= 00 0000 0000
/0032/= d

Munkapoziciók

0250 -0750
0055 -0073

Program

0126	:,	12	0003	0031	
0127	Пу	24	0130	0064	00 n 0000
0130	↓+	20	0031	0065	00 n n
0131	↓-	21	0022	0066	00n-ℓ n-ℓ
0132	+,	10	0031	0073	00 0000 2n
0134	↓+	20	0020	0062	0015 0250+2n
0135	Пz	05	0031	0071	00 0000 n
0136	↓+	20	0010	0070	00 0001 000n
0137	↓-	21	0002	0067	00 0001 000n-1
0140	Пz	05	0000	0050	
0141	Пz	05	0007	0151	
0142	Пу	24	0143	0207	
0143	↓+	20	0070	0152	
0144	Пz	05	0004	0055	00 0250+n 0250+n.
0145	↓+	20	0065	0056	00 0250+n 0250+n
0146	Пz	05	0025	0050	
0147	Пz	05	0001	0053	
0150	Пу.	74	----	ε.	
0151	(			)	
0152	(			)	
0153	+	00	0002	0151	
0154	+	00	0002	0152	
0155	+	00	0027	0050	
0156	-,	11	0050	0026	
0157	уП·	34	0160	0150	
0160	Пz·	05	0021	n	

0161	+	00	0010	β
0162	—	01	0002	0073
0163	VΠ̄	34	0164	β'
0164	+,	10	0011	0055
0165	Пy	24	0166	0171
0166	+,	10	0012	0056
0167	Пy	24	0170	0172
0170	↓+	20	0066	0057
0171	(			)
0172	(			)
0173	+	00	0005	0171
0174	+	00	0005	0172
0175	↓|-|,	71	0057	
0176	VΠ̄	34	0171	0177
0177	Пz	05	0055	0060
0200	Пz	05	0056	0055
0201	Пz	05	0060	0056
0202	+	00	0030	0050
0203	Пz	05	0006	0053
0204	Пy	74		γ.
0205	+	00	0071	0207
0206	↓+	20	0067	0210
0207	(	..	....	....)
0210	(	..	....	....)
0211	÷,	11	0071	0000
0212	Пy,	24	0213	0071
0213	∠1,	16	0013	0055
0214	↓+	20	0017	β

0215	Π₂	05	0031	0072
0216	+	00	0010	β
0217	−	01	0002	0072
0226	YΠ	34	0221	β'
0221	Λ,	16	0013	0055
0222	↓+	20	0014	0224
0223	↓+	20	0064	0061
0224	(	••	••••	••••)
0225	YΠ	34	0231	0226
0226	+	00	0010	0224
0227	↓|−|,	71	0061	
0230	YΠ	34	0224	0237
0231	Π₂	05	0020	0232
0232	(	••	••••	••••)
0233	+	00	0002	0232
0234	↓|−|,	71	0062	
0235	YΠ	34	0232	0236
0236	Π₂ Π	55	0023	0023
0237	|−|,	51	0032	0050
0240	YΠ	34	0164	n3gáll

IV. 3. Dirichlet féle feladat numerikus megoldása a Laplace egyenletre.

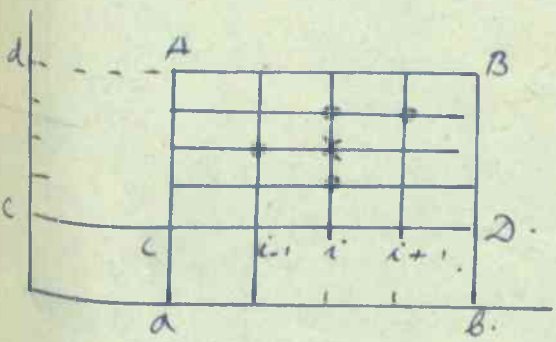
Készítette: Kelecsán János
Ellenőrizte: Heidinger László

Mint ismeretes a Dirichlet féle feladat a következő: Keresendő a sík egy adott R tartományában harmonikus u/x,y/ függvény, amely a tartomány határán adott; azaz amelyre:

$$\Delta u = 0 \quad s \quad u/_R = \varphi /x,y/$$

A feladatot rácspont módszerrel oldjuk meg, s feltesszük, hogy a tartomány téglalap /$a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$/.

Osszuk fel a tartományt egymástól h távolságra haladó, s az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel az ábrán látható módon.



Legyen az AB oldalon lévő osztópontok száma k/ végpontokat is beleértve/ a BD oldalon lévőké pedig l /a végpontokat nem számítva/.

Jelöljük u_{ij}-vel az u megoldás P /a+ih, c+jh/ pontban felvetett közelítő értékét. Mint ismeretes /lásd Panox: Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller differentiál gleichungen ...67.old./ a rácspontokra fennállnak az:

$$u_{ij} = \frac{1}{4} /u_{i,j+1} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j}/ \qquad 1/$$

illetve a pontosabb

$$u_{i,j} = \frac{4 /u_{i,j+1} + u_{i,i+1} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j}/}{20} + \qquad 2/$$

$$\frac{1}{20} /u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}/$$ egyenlőségek.

Az 1/ és 2/ képlethez hozzárendelhető a

ill.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

operátor elrendezésmátrix s ebben az értelemben szokás azt mondani, hogy az 1/, ill. 2/ képlet a H. ill. K. operátor P (i, j/ pontra való alkalmazása utján jött létre. /Lásd Milne: Csiszlennoje resenie differenciálnik uravnenii ..144..old./

A megoldás rácspontokban vett közelitő értékeit a következő módon nyerjük.

Minthogy az u_{ij} /i=1, ...k j=o ...ℓ/ értékek csak a határon ismeretesek, ezért a H operátort alkalmazva minden /nem határon lévő/ pontra egy /n-2/ ℓ ismeretlent tartalmazó - s ennyi egyenletből álló

$\underline{\underline{H}}\underline{u}=\underline{b}$ egyenletrendszerhez jutunk.

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai szolgáltatják a feladat megoldásának közelitő értékeit a megfelelő pontokban.

<u>$\underline{\underline{H}}\underline{u}=\underline{b}$ egyenletrendszer megoldása:</u>

A $\underline{\underline{H}}$ mátrix a következő - könnyen belátható - speciális tulajdonságokkal rendelkezik. /Lásd: Milne: im. 218.old./

1./ $\underline{\underline{H}}$ pozitiv definit;

2./ $\underline{\underline{H}}$ mátrix csak tartománytól függ;

3./ A födiagonálisban mindenütt 4-es áll, a többi helyen soronként legfeljebb 4-1-es a többi elem 0.

Az egyenletrendszert gradiens módszerrel oldjuk meg. /Lásd: Booth "Numerical methods" c. könyve 97.old./

Legyen $\underline{v}_\nu$ az $\underline{u}$ vektor ν-edik közelitése. Akkor a ν+1-edik közelitést a következő lépésekkel határozzuk meg.

$$\underline{r}_0 = \underline{\underline{H}}\,\underline{v}_0 - \underline{b}$$

$$\underline{z}_\nu = \underline{\underline{H}}\,\underline{r}_\nu$$

$$q_\nu = \frac{\underline{r}_\nu \underline{r}_\nu}{\underline{r}_\nu \underline{z}_\nu} \cdot 0{,}9$$

$$\underline{v}_{\nu+1} = \underline{v}_\nu - q_\nu \underline{r}_\nu$$

$$\underline{r}_{\nu+1} = \underline{r}_\nu - q_\nu \underline{z}_\nu .$$

Az iterációt addig folytatjuk, mig az r_ν vektor r_{ν_i} kordinátáira

$$/r_{\nu_i}/ < \varepsilon$$

ahol ε. előre adott.

Az információk ábrázolása:

Minthogy az ismeretlenek száma a $\underline{\underline{H}}u=b$ egyenletrendszerben $/n-2/\ell$ tehát $\underline{\underline{H}}$ mátrix elemeinek száma $/n-2/^2 \ell^2$. Ezért - mivel az M-3 gép csak 2048 szóból álló memóriával rendelkezik - következőképpen járunk el.

A $\underline{\underline{H}}$ mátrixot $\underline{\underline{H}} = 4\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{H}}_1$ alakban irjuk fel.

A $4\underline{\underline{E}}$ mátrix egyetlen elemmel /4/ ábrázolható. A $\underline{\underline{H}}_1$ mátrix csak a o, és -1 elemekből áll; a -1-sek száma soronként legfeljebb 4. A $\underline{\underline{H}}_1$ mátrixot ezért a következő módon ábrázoljuk.

Minden sornak megfeleltetünk egy-egy szót. Minden szót öt részre osztunk fel: az első rész 8 bit-ből, a következő három rész 7-7 bit-ből, az utolsó rész 1 bit-ből áll.

Legyen a μ-edik sorban;

$O_{\mu 1} \leq 255$ az első egyes előtt álló 0-ák száma

$O_{\mu 2} \leq 127$ az első és második 1-es között álló 0-ák száma

$O_{\mu 3} \leq 127$ a második és harmadik 1-es között álló 0-ák száma

$O_{\mu 4} \leq 127$ a harmadik és negyedik 1-es között álló 0-ák száma.

Igy a következő módon ábrázolunk egy sort:

A megfelelő szó:	első részébe	beirunk		$O_{\mu 1}+1$ -et
	második	"	"	$O_{\mu 2}+1$ -et
	harmadik	"	"	$O_{\mu 3}+1$ -et
	negyedik	"	"	$O_{\mu 4}+1$ -et
	ötödik	"	"	0 -t

Ez az ábrázolásmód lényegesen egyszerüsiti a programot, segitségével a $\underline{\underline{H}}\,\underline{x} = /4\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{H}}_1/\,\underline{x}$ szorzást ugy végezzük el, hogy a $4\underline{\underline{E}}\,\underline{x} = 4\,\underline{x}$ vektor megfelelő koordinátájából levonjuk a $\underline{x}$ vektor $O_{\mu 1}+1$-edik $/O_{\mu 1}+O_{\mu 2}+2/$-odik stb. koordinátáját.

A megoldás finomitása:

A $\underline{\underline{H}}u=b$ egyenletrendszer $\underline{v}_\nu$ megoldását ugy finomitjuk, hogy a nyert értékekre mint a $\Delta u=0$ egyenlet megfelelő pontokban vett megoldásainak közelitéseire pontonként alkalmazzuk a $\underline{\underline{H}}$ operátort. Annyiszor "pásztázzuk" ezen a módon végig az adott tartományt, amig a ν -edik és a ν +1-edik közelitésre nézve:

$$u_{ij}^{(\nu)} = u_{ij}^{(\nu+1)} \qquad \begin{array}{l} /i = 1, 2, \ldots n/ \\ /j = 1, 2, \ldots n/ \end{array}$$

Még fontosabb közelitést nyerünk, ha a H operátor helyett a K operátort alkalmazzuk pontonként, az előbb leirt módon.

A feladat megoldásának menete:

1./ Kiszámitjuk fixpontos programmal a peremfeltételt a megfelelő pontokban és ezeket az értékeket elhelyezzük a memória α -tól α+k-ig terjedő pozicióiban.

2./ Ezon értékek segitségével előállitjuk a b vektort lebegőpontos alakban.

3./ Megoldjuk a Hu=b egyenletrendszert lebegőpontos program segitségével.

4./ A nyert megoldást a pontossági követelményektől függően a H illetve K operátor segitségével finomitjuk lebegőpontos programmal.

Megjegyzés:

A feladat lebegőponttal való programozása miatt a rácspontok lehetséges száma erősen csökken; a végrehajtási idő is megnő. Azt, hogy a megoldásértékek ne csorduljanak tul, könnyü elérni, minthogy a Laplace egyenlet megoldása a határon veszi fel minimumát ill. maximumát; igy csak a határfeltételt kell ugy transzformálni, hogy abszolut értékben minden érték egynél kisebb legyen, ebből már következik, hogy $|u(x, y)| < 1$ /a határfeltételnek - mint kétváltozós függvénynek szélső értékei könnyen meghatározhatók./

Az egyenletrendszer közbülső eredményeinél azonban nem biztositható a tulcsordulás elkerülése, minthogy ezeket nehéz becsülni. Elkészithető azonban egy olyan program is, amely az egyenletrendszert lebegőponttal oldja meg, még a H ill. K operátorral való finomitást fixpontos programmal mégpedig ugy, hogy az egyenletrendszer lebegőponttal nyert megoldásait egy közös kitevőre normalizáljuk, természetesen megvizsgálva, hogy ez nem jár-e nagy jegyveszteséggel. A Poisson egyenlet megoldását nem programozzuk be, ez visszavezethető Laplace egyenlet megoldására.

P o s i c i ó e l o s z t á s

Konstansok:

/ooo1/=		oo	ooo2	ooo2	
/ooo2/=		o1	oooo	oooo	
/ooo3/=	Λ,	16	22o1	ooo6	
/ooo4/=		oo	ooo1	ooo1	
/ooo5/=		oo	ooo1	oooo	
/ooo6/=		11111111	oo .... o		
/ooo7/=		oooooooo	1111111 o .... o		
/oo10/=		o....	o.... o 1111111o ... o		
/oo11/=		o...	o...		o11111111 o... o
/oo12/=		oo	oooo	ooo1	
/oo13/=	↓x,	33	oo26		
/oo14/=	↓x,	33	oo27		
/oo15/=		oo	oooo	ooo5	
/oo16/=	Πz.	o5	o11o	Q	
/oo17/=		oo	oooo	o122	
/oo2o/=		oo	oooo	ooo2	
/oo21/=	Πy.	74	----	3361	
/oo22/=		oo	oooo	ooo4	
/oo23/=	Πy	74	----	3312	
/oo24/=	x,	13	o11o	o1o2	
/oo25/=		oo	ooo2	oooo	
/oo26/=		2^{-9}			
/oo27/=		2^{-2}			
/oo3o/=		2^{-5}			
/oo31/=		2^{-12}			
/oo32/=	−	o1	o111	Q+1	
/oo33/=	Πy	74	----	3325	
/oo34/=	Πz	o5	o1o6	Q	

/0035/=	Пг. 05	P	0110
/0036/=	(–), 51	0110	0076
/0037/=	Пу 74	----	3500
/0040/=	Х) 13	0110	0110
/0041/=	02	7776	7777
/0042/=	Пу 74	----	343D
/0043/=	Пу 74	----	3370
/0044/=	0,9		
/0045/=	00	0000	0003
/0046/=	Пz 05	0110	P
/0047/=	+) 10	0020	0111
/0050/=	УП. 34	3301	3436

Paraméterek

/0077/= 00 0000 n

/0076/= ε = /0075/

A H mátrix helye:

2201 az első sornak megfelelő szó pozíciója

2202 a második sornak megfelelő szó pozíciója

.

.

.

2201+n-1 az n-edik sornak megfelelő szó pozíciója.

Munkapoziciók

0056-0074-ig.0100, 0101,0102

A v vektor helye. /A számítás kezdetén paraméterként visszük b

0110 = v_{y_1} = 0111

0112 = v_{y_2} = 0113

.

.

.

0110+2n-2 = v_{y_λ}=0111 = 2n-2

Az r helye:

0110+2n = r_{y_1};0111+2n

0110+4n-2 = r_{y_n}=0111+4n-2

A z helye:

0110+4n = z_{y_1}= 0111+4n

0110+6n-2 = z_{y_n} = 0111+6n-2

A $b/b_1,b_2...b_n/$ helye:

$/2466/ = b_1 = /2467/$

$/2466+2n-2/ = b_n = /2467+2n-2/$

A belső rácspontok számát a memóriakapacitás korlátozza.
Legyen $n \leq 180$.

P

P r o g r a m

```
324o −,11  oo21  oo77
3241 Пу 24 3242  oo74   oo oooo  ooo n-1
3242 :,12  oo31  oo77
3243 Пу 24 3244  oo73   oo  n   oooo
3244 ↓+ 2o oo73  oo72   oo 2n   oooo
3245 ↓+ 2o oo72  oo71   oo 4n   oooo
3246 +,1o  oo77  oo77
3247 Пу 24 325o  oo67   oo oooo  2n
325o ↓+ [illegible]o oo72  oo55   oo 2n    2n
3251 ↓+,3o oo72
3252 ↓+ 2o oo4o  oo63 x, ollo + 4n ollo +2n
3253 +,1o  oo35  oo67
3254 Пу 24 3255  oo65 Пг·P  ollo + 2n
3255 ↓+ 2o oo67  oo61 Пг P  ollo  + 4n
3256 +,1o  ooo3  oo73
3257 Пу 24 326o  oo64   22ol + n   ooo6
326o +,1o  oo72  oo24
3261 Пу 24 3262  oo62 X,ollo+2n   olo2
3262 +,1o  oo72  oo36
3263 Пу 24 3264  oo57 |−|,ollo + 2n oo76
3264 ↓+ 2o oo72  oo56 |−|, ollo+  4n oo76
3265 +,1o  oo32  oo72
3266 Пу 24 3271  oo6o  −  ollo+2n [illegible]+1
3271 Пг o5 oo5o  3341
3272 Пг o5 oo47  33o2
```

3273	Пг 05	0046	33o1
3274	Пг 05	0034	0066
3275	Пг 05	0065	3331
3276	↓+ 20	0004	3332
3277	Пг 05	0033	V + L
3300	Пг 05	0003	0070
3301	(		)
3302	(		)
3303	Пу 24	3304	P+1)
3304	Пг 05	0070	3314
3305	Пг 05	0066	3323
3306	Пг 05	0013	3320
3307	Пг 05	0043	3330
3310	−, 11	3320	0014
3311	УП 34	3312	3314
3312	− 01	0002	3320
3313	+ 00	8022	3330
3314	(		)
3315	↓−, 31	0012	----
3316	УП 34	3331	3317
3317	↓+, 30	0012	
3320	(		)
3321	↓+ 20	3323	3323
3322	↓+ 20	0004	3324
3323	(		)
3324	(		)
3325	Пу 74	—	T
3326	+ 00	0012	3314
3327	+ 00	0005	3320

```
3330  {              )
3331  (              )
3332  (              )
3333 + 00   0025   3301
3334 + 00   0020   3302
0005 + 00   0020   3331
3336 + 00   0020   3332
3337 + 00   0005   0070
3340 lн,71  0064
3341 (               )
3342 - 01   0067   3331
3343 - 01   0067   3332
3344 - 01   0072   3301
3345 - 01   0067   3302
3346 Пz 05  0063   3353
3347 l- 21  0041   3355
3350 l+ 20  0055   0100
3351 Пz 05  0000   0101
3352 Пz 05  0000   0102
3353 (               )
3354 Пу 24  3355   P
3355 (               )
3356 Пу 24  3357   P+1
3357 Пz 05  0021   V+l.
3360 Пу 74  ----   V
3361 Пz 05  0102   Q
3362 Пz 05  0101   Q+1
3363 + 00   0022   V+l
```

3364	Пу 74	----	и
3365	Пz o5	P	olo2
3366	Пz o5	P+l	olol
3367	+ oo	oool	3353
337o	+ oo	oool	3355
3371	Ш, 71	oloo	----
3372	УП 34	3353	3373
3373	Пz o5	olol	olo3
3374	Пz o5	olo2	olo4
3375	− ol	oo72	oo63
3376	+ oo	oo15	3372
3377	Пz 74	----	3316
34oo	+ oo	oo72	oo63
34ol	− ol	oo15	3372
34o2	Пz o5	olo3	Q+l
34o3	Пz o5	olo4	Q
34o4	Пz o5	oo35	3434
34o5	l+ 2o	ooo4	3435
34o6	Пz o5	oo16	343o
34o7	l+ 2o	ooo4	3431
341o	Пz o5	oo23	V+L
3411	Пу 74	----	t
3412	X o3	oo44	P
3413	+ oo	oo45	V+ l.
3414	Пу 74	----	V
3415	−, 11	P	oooo
3416	Пу 24	3417	olo2
3417	Пz o5	P+l	olo3
342o	Пz o5	oo62	3422

3421	↓ −	21	0041	3424
3422	(			)
3423	Пу	24	3424	P
3424	(			)
3425	Пу	24	3426	P+1
3426	Пт	05	0042	V+ l
3427	Пу	74	----	V
3430	(			)
3431	(			)
3432	+	00	0022	V+ l
3433	Пу	74		u
3434	(			)
3435	(			)
3436	+	00	0025	3422
3437	+	00	0025	3424
3440	+	00	0025	3430
3441	+	00	0025	3431
3442	+	00	0020	3435
3443	+	00	0020	3434
3444	↓1−1,	71	0061	
3445	VП	34	3422	3446
3446	Пт	05	0060	3451
3447	Пт	05	0057	3454
3450	Пт	05	0075	Q+1
3451	(			)
3452	↓1−1,	71	0012	
3453	VП	34	3454	3456
3454	(			)
3455	Пу	24	3457	----

3456	Пz	05	Q+1	Q+1
3457	УП.	34	3277	3460
3460	+	00	0025	3454
3461	+	00	0025	3451
3462	↓1-1,	71	0056	3516
3463	УП.	34	3450	3516.
3464	−	01	0017	3341
3465	+	00	0072	3066
3466	Пc.	05	0065	3500
3467	↓+	20	0004	3501
3470	+	00	0072	3472
3471	↓+.	20	0004	3473
3472	Пc.	05	0110	P
3473	(			).
3474	Пc.	05	3466	Q
3475	Пz.	05	2467	Q+1
3476	Пz	05	0037	V+l.
3477	Пγ	74	----	V
3500	(			)
3501	(			)
3502	+	00	0025	3472
3503	+	00	0025	.3473
3504	+	00	0025	3474
3505	+	00	0025	3475
3506	+	00	0020	3501
3507	+.	00	0020	3500
3510	↓1-1,	71	0061	----
3511	УП.	34	3472	3512
3512	−	01	0071	3472
3513	−	01	0072	3474

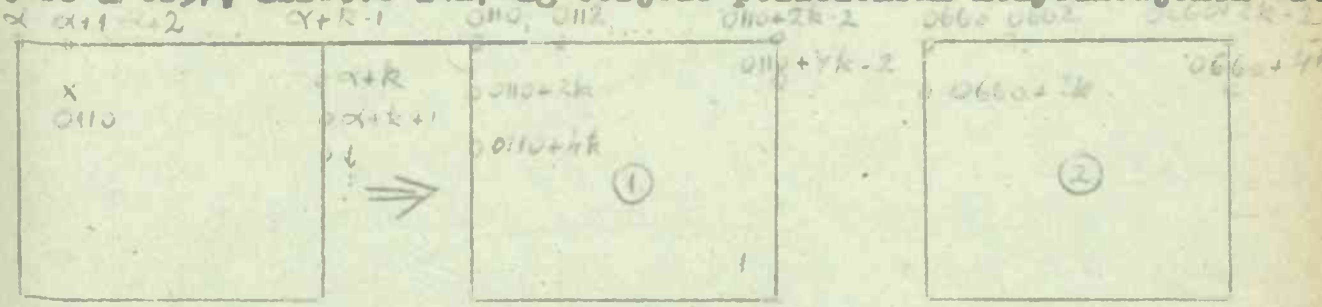
9514	—	01	0072	3475
9515	Пу	74	----	3277

A megoldás finomitásának programja.

A program három részből áll:

1./ A 22oo - 2252-ig terjedő részben előállitjuk a szükséges paramétereket és az ezektől függő utasitásokat.

2./ A 23oo - 2352-ig terjedő részben kialakitunk két rácstartományt a memóriában ugy, hogy az eredetileg α-tól, fixpontos alakban elhelyezett peremértékek normalizálva az R belső rácspontjaiban - a Hu=b egyenletrendszer megoldásaként - nyert értékekkel együtt egymásután a 0110-től illetve a 0660-tól kezdődő és legfeljebb a 0657, illetve 1427-ig terjedő poziciókban helyezkedjenek el.



3./ A harmadik részben az igy kialakitott rácstartományokra felváltva alkalmazzuk a H, illetve K operátorokat. /Ha az i, j, pontra alkalmazzuk H, illetve K, akkor a nyert értékeket az i+55o j+55o pontnak megfelelő pozicióba visszük, s forditva./ Ha a finomitást a H operátorral végezzük, akkor a 2352 pozicióba $\Pi\gamma$ -2361-et irunk, ha K-val akkor $\Pi\gamma$ - 2472-t.

Konstansok:

Felhasználjuk az I-rész /Πu=b/ konstansait is, a fel nem használt konstansok helyére beirjuk a következőket:

/0002/ = 74	$\bar{\Pi}y$	$-$	2475
/0003/ = 05	$\Pi\tau$	0044	$v+l.$
/0006/ = $\frac{1}{2}$			
/0007/ = 74	Πy		2323
/0010/ = 24	Πy	2325	0660
/0011/ = 34	$V\Pi$	2336	2331
/0013/ = 02		0110	2465
/0014/ = 00		0550	0000
/0015/ = 00		0000	0550
/0016/ = $\frac{1}{20}$ = 0017			
/0021/ = 05	$\Pi\tau$	P	0110
/0023/ = 00		0004	0000
/0024/ = 00		0002	0001
/0026/ = 00		0006	0006
/0027/ = 05	$\Pi\tau$	662	P
/0030/ = 05	$\Pi\tau$	P	0112
/0032/ = 2^{-15}			
/0033/ = 74	Πy	$-$	2513
/0034/ = 11	$-,$	0112	0662
/0035/ = 24	Πy	2423	0113
/0036/ = 74	Πy		2411
/0037/ = 00		0000	0006
/0040/ = 00		0006	0000
/0041/ = 00	+	0022	$v+l.$
/0042/ = 74	Πy	$-$	2403
/0043/ = 05	$\Pi\tau$	0110	0662
/0044/ = 74	Πy	$-$	2506

Paraméterek:

/0100/ = 00 0000 000 l

/0101/ = 00 0000 000 x

/0102/ = $\Pi\tau$ $\alpha-1$ F

/2352/ = Πy f 2361 /B/
2472 /K/

Munkapoziciók:

0050 - 0077

Paraméterek. utasitások előállitása:

2200	10	+,	0101	0101			
2201	24	Πy	2202	0055	00	0000	2k
2202	22	↓:	0031	0057	00	0002k	0000
2203	21	↓−	0025	0060	00	0002k−2	0000
2204	20	↓+	0023	0061	00	0002k+2	0000
2205	20	↓+	0020	0062	00	0002k+2	0002
2206	10	+,	0057	0057			
2207	24	Πy	2210	0063	00	0004k	0000
2210	23	↓x	0031	0065	00	0000	0004k
2211	11	−,	0012	0101			
2212	24	Πy	2212	0066	00	0000	0000k−1
2213	21	↓−	0012	0067	00	0000	000k−2
2214	21	↓−	0012	0064			k−3
2215	12	:,	0032	0100			
2216	24	Πy	2216	0071			
2217	12	:,	0032	0101			
2220	33	↓x,	0071				
2221	22	↓:	0006	0071	00	0000	0002lk
2222	32	↓:,	0031	0072	00	0002lk	000
2223	20	↓+	0071	0073	00	0002lk	0002lk
2224	10	+,	0043	0055			
2225	24	Πy	2226	2302	Πτ	0110	0662+2k
2226	20	↓+	0004	2303			
2227	05	Πτ	0102	2320			
2230	05	Πτ	0021	2323			
2231	20	↓+	0004	2325			
2332	05	Πτ	0010	2324			
2233	20	↓+	0024	2326			
2234	05	Πτ	0011	2330			
2235	05	Πτ	0035	0074	Πy	2423	0113
2236	05	Πτ	0030	0075	Πτ	P	0112
2237	11	−,	0012	0100			
2240	24	Πy	2241	0054			
2241	05	Πτ	0027	0076	Πτ	0662	P
2242	10	+,	0055	0057			
2243	20	↓+	0034	0070	−,	0112+2k	0662+2k
2244	31	↓−,	0026	−			

	2245	20	↓+	0073	0073	–, 011o+2k+2l_k–4 0660+2k+2l_k–4.
	2246	05	Пτ	0014	0053	00 0550 0000
	2247	05	Пτ	0015	0052	00 0000 0550
	2250	10	+,	0072	0063	
	2251	20	↓+	0013	0072	02 0110+2l_k+4k 2465
	2252	74	Пγ	–	2300	
A két	2300	05	Пτ	0054	0050	
rács-	2301	05	Пτ	0064	0051	00 0000 k–3
tarto-	2302					
mány	2303					
kiala-	2304	00	+	0001	2302	
kitá-	2305	00	+	0001	2303	
sa.	2306	01	–	0012	0051	
	2307	34	YП	2310	2302	
	2310	00	+	0022	2302	
	2311	00	+	0022	2303	
	2312	01	–	0012	0050	
	2313	34	YП	2314	2301	
	2314	05	Пτ	0001	0050	00 0000 0002
	2315	05	Пτ	0007	+	
	2316	05	Пτ	0066	0051	
	2317					
	2320					
	2321	05	Пτ	0000	P+1	
	2322	74	Пγ	–	V	
	2323					
	2324					
	2325					
	2326					
	2327	–		0012	0051	
	2330					
	2331	00	+	0050	2325	
	2332	00	+	0050	2324	
	2333	00	+	0050	2325	
	2334	00	+	0050	2326	
	2335	74	Пγ	–	2317	
	2336	05	Пτ	0100	0051	
	2337	05	Пτ	0055	0050	
	2340	00	+	0023	2330	

2341	74	Пу	-	2331	
2342	05	Пz	0067	0051	00 0000 K-2
2343	00	+	0023	2330	
2344	11	-,	0020	0000	
2345	24	Пу	2331	0050	-00 0000 0002
2346	05	Пz	0054	0051	00 0000 l-1
2347	00	+	0023	2330	
2350	11	-,	0055	0000	
2351	24	Пу	2331	0050	-00 0000 2k
2352	/			/	
2361	05	Пz	0041	2417	
2362	05	Пz	0042	2402	
2363	10	+,	0055	0074	
2364	24	Пу	2365	2422	
2365	10	+,	0055	0075	
2366	24	Пу	2367	2423	
2367	05	Пz	0054	0050	00 0000 -1
2370	05	Пz	0064	0051	/00 0000 k-3
2371	05	Пz	0076	2403	
2372	20	l+	0062	2405	
2373	20	l+	0060	2411	
2374	21	l-	0061	2415	
2375	10	+,	0004	2403	
2376	24	Пу	2377	2404	
2377	20	l+	0062	2406	
2400	20	l+	0060	2412	
2401	21	l-	0061	2416	
2402					
2403					
2404					
2405					
2406					
2407	05		0036	*	
2410	74	Пу	-	u	
2411					
2412					
2413	00	+	0022	v *	
2414	74	Пу.	-	u	
2415					
2416					

2417					
2420	74	Пу	–		u
2421	11	–,	0020	Р+1	
2422					
2423				.	
2424	01	–	0012	0051	
2425	34	VП	2432	2426	
2426	00	+	0020	2422	
2427	00	+	0020	2423	
2430	00	+	0025	2403	
2431	74	Пу	–	2372	
2432	01	–	0012	0050	
2433	34	VП·	2441	2434	
2434	00	+	0037	2422	
2435	00	+	0037	2423	
2436	05	Пz	0064	0051	
2437	00	+	0040	2403	
2440	74	Пу	–	2372	
2441	05	Пz	0070	2446	
2442	20	↓+	0004	2443	
2443					
2444	71	↓1-1,	0012		
2445	34	YП·	2446	2455	
2446					
2447	71	↓1-1,	0012		
2450	34	VП·	2451	2455	
2451	00	+	0001	2443	
2452	00	+	0001	2446	
2453	51	↓1-1,	2446	0073	
2454	34	YП	2464	2443	
2455	01	–	0053	0076	
2456	00	+	0052	0074	
2457	00	+	0052	0075	
2460	11	–,	0053	0000	
2461	24	Пу	2462	0053	
2462	11	–,	0052	0000	
2463	24	Пу	2363	0052	
2464	05	Пс	0013	(3	
2465	00	+	0025	(3	
2466	71	↓1-1,	0072	–	
2467	34	VП	α'	[illegible]11.	

2472	05	Пτ	0002	2402
2473	05	Пτ	0003	2417
2474	74	Пу	-	2363
2475	21	l-	0057	2510
2476	20	l+	0023	2514
2477	20	l+	0063	2520
2500	21	l-	0023	2524
2501	21	l-	0004	2523
2502	20	l+	0023	2517
2503	21	l-	0063	2513
2504	21	l-	0023	2507
2505	74	Пу	-	2403
2506	00	+	0020	P+1.
2507				
2510				
2511	05	Пτ	0033	v+ l.
2512	74	Пу	-	u
2513				
2514				
2515	00	+	0022	v + l.
2516	74	Пу	-	u
2517				
2520				
2521	00	+	0022	v+ l.
2522	74	Пу	-	u
2523				
2524				
2525	00	+	0022	v+ l.
2526	74	Пу	-	u
2527	00	+	0017	P+1
2530	03	x	0016	F
2531	00	+	0022	v+ l.
2532	74	Пу	-	v
2533	05	Пτ	P+1	P+1
2534	24	Пу.	2422	P+1

1958.XII.12.
Kóné

IV. 4. A Dirichlet feladat megoldásának programja,

a $\Delta \mu = 0$; $\Delta \mu = f/x,y/$; $\Delta^2 \mu = 0$, $\Delta^2 \mu = f/x,y/$

egyenletekre.

Készitette: Szelezsán János
Ellenőrizte: Gergely József

A módszer leirása.

Legyen adva egy párosrendü

$$\sum_{\alpha=0}^{2} \sum_{\beta=0}^{2} d_{\alpha\beta} \frac{\partial^{2\alpha+2\beta} w/x,y/}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\beta}} = q/x,y/ \quad \text{parciális}$$

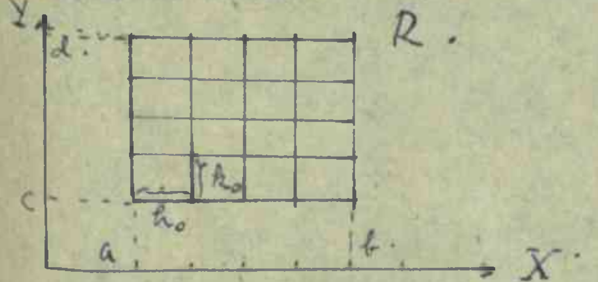
differenciálegyenlet. Ennek egy

R $/a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d/$ téglalap alaku tartomány bizonyos pontjaiban vett közelitő megoldását, ha peremfeltételként a

$$\frac{\partial^{2\mu+2\nu} w/x,y/}{\partial x^{2\mu} \partial y^{2\nu}} = g_{\mu\nu}/x,y/ \qquad /0 \leq \mu < \alpha, \; 0 \leq \nu < \beta/$$

függvények, illetve ezek lineáris kombinációi adottak, a következő módon határozhatjuk meg.

Osszuk fel a tartományt derékszögü négyszögráccsal az ábrán látható módon.



Legyen a belső rácspontok száma: $m \times n$ legyen

$$h_o = \frac{b-a}{m+1} \qquad k_o = \frac{d-c}{n+1}$$

az X, ill Y irányu lépésköz.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$w/x,y/_{\substack{x=jh_o \\ y=lk_o}} \approx w_{jl}$$

- 2 -

$$\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}_{\substack{x=jh_o\\ y=lk_o}} \approx \ddot{w}_{jl}; \qquad \left\{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}_{\substack{x=jh_o\\ y=lk_o}} \approx \overset{\shortparallel}{w}_{jl} \ldots\ldots \text{stb.}$$

$$Q_{jl} = h_o k_o q\ /jh_o\ lk/$$

$$/j = 1,\ 2,\ \ldots\ m/$$
$$/\ l = 1,\ 2,\ \ldots\ n/$$

Célszerű a belső rácspontokban felvett w_{jk} közelitőértékekből a

$$W = [w_{jk}] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & & & w_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixot képezni.

Ugyanigy: $\ddot{\underline{W}} = [\ddot{w}_{jk}]$; $\overset{\shortparallel}{\underline{W}} = [\overset{\shortparallel}{w}_{jk}] \ldots$ stb.

Képezzük a:

$$\underline{W}_{/o/} = \begin{bmatrix} w_{o,o} & 0 \ldots 0 \ldots & w_{o,n+1} \\ 0 & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & & \\ w_{m+1,o} & 0 \ldots 0 \ldots & w_{m+1,\ n+1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{W}_{/1/} = \begin{bmatrix} w_{o1}, & w_{o2}, & \ldots & w_{on} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ w_{m+1,1}, & w_{m+1,2}, & \ldots & w_{m+1,n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{W}_{/2/} = \begin{bmatrix} w_{1o} & 0 \cdots 0 & w_{1n+1} \\ w_{2o} & & w_{2,n+1} \\ & & \\ w_{mo} & 0 \cdots 0 & w_{m,n+1} \end{bmatrix}$$

mátrixokat is mégpedig ugy, hogy mindegyik m sorból és n oszlopból álljon. /Az ezekben szereplő 0-tól különböző értékek, az R peremen felvett értékek./

Jelöljük: a

$$Cn^{n} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

n -edrendű kontinuans mátrix j-edik sajátvektorát $\underline{U}_{nj}$-vel, j-edik saját értéket

λ_{nj} - vel,

azaz

$$Cn^{n}\ \underline{U}_{nj} = \lambda_{nj}\ \underline{U}_{nj} \qquad /j,=1,2,\ \dots n/$$

Képezzük az

$$\underline{\underline{U}}_{n}^{*} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{n1}^{*} \\ \underline{U}_{n2}^{*} \\ \vdots \\ \underline{U}_{nn}^{*} \end{bmatrix} = \left[\underline{U}_{n1},\ \underline{U}_{n2},\ \dots\ \underline{U}_{nn}\right]$$

mátrixot.

Cm^{m} -re nézve ugyanigy képezzük

A

$$\underline{\underline{U}}_{m} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{m1}^{*} \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{U}_{mm}^{*} \end{bmatrix} = \left[\underline{U}_{m1},\ \dots\ ,\ U_{mm}\right]$$

mátrixot.

Legyen $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{R}}$ ahol

$\underline{\underline{Q}} = \left[Q_{jk}\right]$ és $\underline{\underline{R}}$ a $\underline{\underline{R}}/1/$, $\underline{\underline{R}}/2/$, $\underline{\underline{\ddot{R}}}/1/$

stb. mátrixok összege.

Jelöljük x jellel az

$\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \times \underline{\underline{A}} = \left[\underline{\underline{A}}_{jk}\right] \left[\underline{\underline{B}}_{jk}\right] = \left[\underline{\underline{A}}_{jk}\ \underline{\underline{B}}_{jk}\right]$ direkt szorzást

Bevezetve az $\underline{\underline{M}} = [M_{jk}]$ u.n. invariáns mátrixot

ahol $$M_{jk} = \frac{1}{\sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta} \lambda^\alpha_{mj} \lambda^\beta_{nk}} \qquad /1,2/$$

s λ_{mj} a $\underline{C}^m_m$, λ_{nk} a C^n_n kontinuáns mátrix sajátértékei,

$/j = 1,2, \ldots m,\ k = 1,2, \ldots n/$

és

$$C_{\alpha\beta} = \frac{d_{\alpha\beta}}{h_o^{2\alpha} k_o^{2\beta}}.$$

A $\underline{\underline{W}}$ mátrixot, azaz a W /x,y/ megoldás rácspontokban vett közelítőértékeinek mátrixát a

$$\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{U}}_m \left\{ \underline{\underline{M}} \times /\underline{\underline{U}}_m\, \underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{U}}_n/ \right\} \underline{\underline{U}}_n \qquad 2/$$

mátrixegyenlet adja meg.

/Lásd: Szabó János: Ein neues Verfahren zur unmittelbaren numerischen Lösung der Dirichletschen Randwertaufgaben. - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Band 38., Heft 7/8. juli, august 1958. - 280 old./

<u>Programozásra való előkészités.</u>

1. A F mátrix könnyen előállitható, ugyanis adott mátrixok összege.
2. Mint ismeretes egy C_n^n kontinuáns mátrix sajátvektorai. /Lásd: Egerváry Jenő: Mátrixfüggvények kanonikus előállitásáról - MTA MAT.-FIZ. oszt.közl. III.köt. 4.szám. 457.old. a. következők:

$$\underline{U}^*_{nk} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin \frac{k\pi}{n+1} ; \sin \frac{2k\pi}{n+1} ; \sin \frac{nk\pi}{n+1} \right.$$

A sajátértékek pedig:

$$\lambda_{nk} = 4.\sin^2 \frac{k\pi}{2/n+1/} = 4 /\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi}{n+1}/$$

$$/ k = 1,2, \ldots n/$$

Látható tehát, hogy az $\underline{\underline{U}}_m$, $\underline{\underline{U}}_n$ mátrixok szimmetrikusak.

Kiirva:

$$U_n = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{n+1} & \sin\frac{2\pi}{n+1} & & \sin\frac{n\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2\pi}{n+1} & \sin\frac{4\pi}{n+1} & & \sin\frac{2n\pi}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\frac{n\pi}{n+1} & \sin\frac{2n\pi}{n+1} & \cdot & \sin\frac{n^2\pi}{n+1} \end{bmatrix}$$

$$U_m = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{m+1} & \sin\frac{2\pi}{m+1} & & \sin\frac{m\pi}{m+1} \\ \sin\frac{2\pi}{m+1} & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\frac{m\pi}{m+1} & \sin\frac{2m\pi}{m+1} & & \sin\frac{m^2\pi}{m+1} \end{bmatrix}$$

A programban a következő módon járnak el. Szubrutin segitségével kiszámitjuk $\sin\frac{\pi}{n+1}$; $\cos\frac{\pi}{n+1}$ -et /illetve $\sin\frac{\pi}{m+1}$; $\cos\frac{\pi}{m+1}$ -et/ s

$$\sin\frac{k\pi}{n+1} = \sin\,/\,\frac{/k-1/\pi}{n+1} + \frac{\pi}{n+1}\,/ =$$

$$= \sin\frac{/k-1/\pi}{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1} + \cos\frac{/k-1/\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{n+1}$$

képlet alapján haladunk rekuszive tovább.

/Természetesen: a $\cos\frac{k\pi}{n+1}$ segédmennyiségeket is lépésenként kiszámitjuk a $\cos\,/\alpha+\beta/ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ képlet alapján./

3. Azt, hogy az 1/ egyenletet α és β milyen értékeire tekintjük, az M mátrix f'jesi ki. A 2/ megoldásuak azonban tetszőleges $0\leq\alpha\leq 2$, $0\leq\beta\leq 2$ paraméterekkel elkészitett programja fixpontos ábrázolásmóddal nem készithető el jelentős memóriarekesz, s

időveszteség nélkül; a tulcsordulási lehetőségek áttekintése körülményes. A gyakorlatban általában a

a/ $\Delta = \left[d_{1o} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_{o1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]$ harmonikus /Laplace/

ill.

b/ $\Delta^2 = \left[d_{2o} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + d_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{o2} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right]$

biharmonikus operátorral szerkesztett

$$\Delta u = 0$$
$$\Delta u = f\ /x,y/$$
$$\Delta^2 u = 0$$
$$\Delta^2 u = f\ /x,y/$$

egyenletek fordulnak elő.

Ezért 1/ megoldását csak ezekre a speciális esetekre programozzuk. Legyen ezen kívül

$$d_{1o} = d_{o1} = d_{2o} = d_{o2} = 1$$

$$d_{11} = 2$$

Nyilván ekkor a Δ operátorhoz tartozó M mátrix M_{jk}-edik elemét a következő képlet adja. /1, 2/-nek megfelelően:

$$M^{\Delta}_{jk} = \frac{1}{\frac{\lambda_{mj}}{h_o^2} + \frac{\lambda_{nk}}{k_o^2}} = \frac{k^2 h^2}{k_o^2 \lambda_{mj} + h_o^2 \lambda_{nk}}$$

Az M_{Δ^2} mátrix $M^2_{\Delta\, jk}$ elemét pedig a

$$M^2_{\Delta\, jk} = \frac{1}{\frac{\lambda^2_{mj}}{h_o^4} + 2 \frac{\lambda_{mj} \lambda_{nk}}{h_o^2\, k_o^2} + \frac{\lambda^2_{nk}}{k_o^4}}$$

képlet adja.

Látható, hogy

$$M^{\Delta^2}_{jk} = /M^{\Delta}_{jk}/^2$$

Mindkét esetben elég tehát az M^{Δ}_{jk} elemeket kiszámitani.

Tulcsordulás vizsgálata.

Nyilvánvaló ha $\overset{m}{\underline{A}}_{mn} = [a_{ij}]$ -ben $|a_{ij}| < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\overset{m}{\underline{B}}_{mr} = [b_{ij}]$-ben $|b_{ij}| < \frac{1}{\sqrt{m}}$ akkor

$\overset{n}{\underline{A}}_{mn}\, \overset{m}{\underline{B}}_{r} = \overset{n}{\underline{C}}_{r} = \left[c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{m} a_{i\nu} b_{\nu j}\right]$ -ben $|c_{ij}| < 1$

Minthogy $\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{U}_{mn}$-ben minden elemre $\frac{1}{\sqrt{2}}|u_{ij}| < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, ezért ha $\underline{P} = [p_{ij}]$ -ben $|p_{ij}| < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, akkor a $\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{P}\,\underline{U}_{mn} = \underline{A}$ mátrixban minden elem kisebb abszolutértékben 1-nél. Megvizsgáljuk $\underline{A} = [a_{ik}]$-t.

Ha max $|a_{ik}| > \frac{1}{\sqrt{m+1}}$, akkor vesszük $p\underline{A} = [pa_{ik}]$ -t, ahol p olyan

hogy max $|pa_{ik}| < \frac{1}{\sqrt{m+1}}$. Igy $\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{U}_{mm}\underline{A} = \underline{B} = [b_{ik}]$ -ban

$b_{ik} \quad 1$

Ha $\underline{M}$ elemei nem csordulnak tul, nyilván az $\underline{M} \times \underline{B}$ szorzatnál sem lép fel tulcsordulás.

Vizsgáljuk meg tehát az M mátrix elemeit, azaz a következő kifejezést.

$$\overset{\Delta}{M}_{jk} = \frac{k_0^2\, h_0^2}{k_0^2\, 4\sin^2\frac{j\pi}{2/m+1/} + h_0^2\, 4.\sin^2\frac{k\pi}{2/n+1/}} \qquad /2,3/$$

Ismeretes, hogy

$$a^2 b^2 \le \frac{a^2 + b^2}{2} = a\frac{a}{2} + b\frac{b}{2}.$$

Ha tehát:

$$\frac{k_0^2}{2} < 4\sin^2\frac{j\pi}{2/m+1/}$$

és $\frac{h_0^2}{2} < 4\sin^2\frac{k\pi}{2/n+1/}$

akkor $/\overset{\Delta}{M}_{jk}/ < 1$ /2,3/

Tegyük fel, hogy $10 \le n \le 50$ $10 \le m \le 50$ s $n\,m < 500$. Akkor k /ill.h/ legnagyobb értéke $\frac{2}{10} = 0,2$ lehet. A sin $\frac{l\pi}{2/l+1/}$; /l=m,n/ az argumentum egyetlen értékénél sem kisebb mint sin $\frac{\pi}{2/l+1/}$, ez viszont l = 50-nél a legkisebb.

éspedig:

$4 \sin^2 \frac{\pi}{100} > 0,00268$

Ha tehát $\frac{k_o^2}{2}$ ill. $\frac{h_o^2}{2}$ kisebbek mint 0,00268, akkor /2,3/ teljesül. De minthogy $\max \frac{k_o^2}{2} = 0,2$ /ill. $\max \frac{h_o^2}{2} = 0,2$ ezért $8.4\, k^2 \sin^2 \frac{j\pi}{2/m+1/}$-et és $8.4 h_o^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2/n+1/}$-et vesszük. /2,3/ nevezőjében.

Tehát:

$$\left| \frac{1}{8} \overset{\Delta}{M}_{jk} \right| = \frac{\frac{k_o^2 h_o^2}{4}}{8 k_o^2 \sin^2 \frac{j\pi}{2/m+1/} + 8h_o^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2/n+1/}} \quad 1$$

Látható, hogy a részeredményekben sem lép fel tulcsordulás.

Igy az $\frac{1}{8}$ W X B mátrixban minden elem kisebb abszolutértékben egynél.

A további mátrixokat ugyanigy normálva s a normáló tényezőket s,q-val jelölve a W_1 mátrixhoz jutunk.

$$\underline{\underline{W}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\underline{Um}}\ s \left[q \left\{ \frac{1}{8} \underline{\underline{M}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\underline{Um}}\ p \left[r \underline{\underline{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\underline{Un}} \right) \right] \right\} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\underline{Un}}.$$

azaz

$$\underline{\underline{W}}_1 = \underbrace{\frac{1}{4}\, \frac{1}{8} \cdot s\, q \cdot pr \cdot}_{\lambda} \underline{\underline{W}}$$

$$W_1 = \lambda W$$

s igy

$$W = \frac{1}{\lambda} W_1$$

/Természetesen 2/ ben minden szereplő $\underline{\underline{A}}_i$ mátrix helyett $\frac{1}{\max/mn/} \underline{\underline{A}}_i$-t véve egyszerűen elkerülhető a tulcsordulás, azonban ez nagy jegyveszteséggel járhat./

Az $\frac{1}{32}$ sq pr szorzatot a program folyamán egy rekeszben gyüjtjük /t+65/ s kinyomtatjuk.

A számitás eredményeként W_1-et nyomtatjuk ki, W-t ezekből az értékekből $\frac{1}{\lambda}$ -val való szorzás utján nyerjük.

<u>A feladat megoldásának menete.</u>

Mindenekelőtt külön program segitségével elkészitjük a

$\underline{\underline{P}} = [p_{ij}]$ mátrixot $/p_{ij}/ < 1$ alakra normálva, s ezt elhelyezzük a

P-től P + n m-1-ig terjedő memóriarekeszben, egyben megvizsgáljuk, hogy $|rp_{ij}| < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ milyen r-re teljesül, s ezt az r számot elhelyezzük a t + 64 rekeszben. Ezután hivjuk be ezt a szubrutint.

Ha a számitás menete megszakad, s a számitást elölről kezdjük, akkor a vezérlést a t + 334-es rekeszre kell átadni, itt történik azoknak a megváltoztatott utasitásoknak a visszaállitása, amelyeket a program nem állit elő. Ha a gép a t + 145-től a t + 166-ig terjedő utasitások teljesitése közben valamiért megáll, akkor az n-től n + 36-ig terjedő utasitásokat behivjuk a memóriába, s a vezérlést ide adjuk át utasitások visszaállitása céljából.

Paraméterek

/t/ = /n-1/ 2^{-30}

/t+1/ = /m-1/ 2^{-30}

/t+2/ = h.

/t+3/ = k.

/t+4/ = $\begin{cases} 0 & \text{ha operátor szerepel.} \\ 2^{-30} & \text{ha } \Delta^2 \text{ " "} \end{cases}$

Konstansok.

/t+5/ =	∪ 2	74	-	t + 101
/t+6/ =		00	0000	8000
/t+7/ =	$\frac{1}{256}$			
/t+1o/ =	$\frac{1}{\pi}$.			
/t+11/ =	$\frac{1}{8}$			
/t+12/ =	A	05	s'	t + 47
/t+13/ =	↓ +	20	t + 50	s' + 1
/t+14/ =	↓ x	23	t + 36	r
/t+15/ =	↓ x,	33	t + 64	
/t+16/ =	∪ 1	24	t + 226	t + 46
/t+17/ =	x,	13	s'	P
/t+2o/ =	le	r		r
/t+21/ =	+, x	20	P	P
/t+22/ =	∪ 1	24	t + 306	t + 47
/t+23/ =	U2	74	-	t + 271
/t+24/ =	00	0000	0031	

/t+25/	=	FU	34	t + 220	t + 200	
/t+26/	=	FU	34	t + 213	t + 200	
/t+27/	=	A	05	t + 31	t + 231	
/t+30/	=	00		P	t + 332	/konvertáló konstans/
/t+31/	=	A	05	t + 46	P	

Munkapoziciók:

t+32, —— t + 65

a-tól a' + max /m,n/-ig

r-től r + n + m - 1-ig -.

P-től P + 2n m- 1-ig.

Behivott szubrutinok.

1. $\sqrt{a}$. szubrutin.

   b-től b + i-ig elhelyezve, és

   $/b_1/ = a.$

   $/b_2/ = \sqrt{a}.$

2. sin x, cos x szubrutin.

   C-től c + ℓ ig elhelyezve, és

   $/C_1/ = x.$

   $/C_2/ = \sin x.$

   $/C_2+1/ = \cos x.$

3. Konvertáló és kinyomtató szubrutin.

   K - tól K + j - ig.

1958.XII.10.
Kné

Program

t + 66	Á	05	t + 27	t + 167
t + 67	Á	05	t + 26	t + 212
t + 70	Á	05	t + 64	t + 65
t + 71	Á	05	t + 14	t + 216
t + 72	Á	05	t + 23	t + 271
t + 73	Á	05	t + 5	b + 1
t + 74	Á	05	0003	t + 40
t + 75	+,	10	t	0010
t + 76	↓ :	22	0004	t + 33
t + 77	:	02	t + 33	t + 40
t + 100	U1	24	b	b_1
t + 101	Á	05	b_2	t + 33
t + 102	↓ x	23	0020	t + 52
t + 103	+	00	0004	t + 75
t + 104	+	00	t + 6	b + 1
t + 105	:,	12	t + 10	t + 40
t + 106	U1	24	t + 74	t + 41
t + 107	−	01	0004	t + 75
t + 110	Á	05	b_2	t + 34
t + 111	↓ x	23	0020	t + 53
t + 112	:	02	t + 10	t + 40
t + 113	x,	13	t + 2	t + 2
t + 114	↓ :	22	t + 11	t + 35
t + 115	x,	13	t + 3	t + 3
t + 116	↓ :	22	t + 11	t + 36
t + 117	+,	10	0005	t
t + 120	↓ :	22	0003	t + 63
t + 121	+,	10	0005	t + 1
t + 122	↓ :,	32	0004	
t + 123	↓ x	23	t + 63	t + 47
t + 124	↓ +	20	t + 31	t + 32
t + 125	Á	05	0004	t + 44
t + 126	+,	10	0005	t
t + 127	↓ +	20	t + 20	t + 303
t + 130	x,	13	t + 35	t + 36
t + 131	↓ x	23	t + 7	t + 37
t + 132	Á	05	t + 17	t + 60
t + 133	↓ +	20	t + 47	t + 61

t + 134	+	00 0005	t + 1
t + 135	↓:	22 0003	t + 54
t + 136	/Á	05 t + 41	c_1/
t + 137	+,	10 0016	t + 137
t + 140	Ul	24 o	o + 1
t + 141	Á	05 c_2	t + 42
t + 142	↓x	23 t + 33	s'
t + 143	Á	05 c_2 + 1	t + 43
t + 144	↓x	23 t + 33	t + 62
t + 145	−,	11 t + 44	0000
t + 146.	Ul	24 t + 147	t + 44
t + 147	↓x	23 0003	t + 45
t + 150	+	00 t + 44	t + 136
t + 151	−	01 t + 44	t + 142
t + 152	−	01 t + 44	t + 144
t + 153	+	00 t + 45	t + 176
t + 154	+	00 t + 44	t + 216
t + 155	+	00 t + 44	t + 70
t + 156	+	00 t + 44	t + [illegible]1
t + 157	−	01 t + 44	t + 220
t + 160	+	00 t + 44	t + 171
t + 161	+	00 t + 45	t + 257
t + 162	−	01 t + 44	t + 167
t + 163	+	00 t + 44	t + 172
t + 164	+	00 t + 44	t + 173
t + 165	+	01 t + 45	t + 261
t + 166	+	00 t + 45	t + 134
t + 167	Á	05 t + 31	t + 231
t + 170	Á	05 t + 34	t + 51
t + 171	Á	05 t + 1	t + 56
t + 172	Á	05 t + 53	t + 57
t + 173	Á	05 t + 61	t + 223
t + 174	Á	t + 12	t + 200
t + 175	Á	05 t + 13	t + 203
t + 176	−,	11 0005	t + 1
t + 177	Ul	24 t + 200	t + 46
t + 200	/ Á	05 s'	t + 47
t + 201	↓x	23 c_2 + 1	t + 50
t + 202	x,	13 t + 62	c_2

t + 203 /	↓ +	20	t + 50	s + 1 /
t + 204	x	03	c_2	t + 47
t + 205	x,	13	c_2+1	t + 62
t + 206	↓ −	21	t + 47	t + 62
t + 207	+	00	0004	t + 200
t + 210	+	00	0005	t + 203
t + 211	−	01	0005	t + 46
t + 212	FU	34	t + 213	t + 200
t + 213	x,	13	0017	c_2 + 1
t + 214	U1	24	t + 215	t + 47
t + 215	−,	11	t + 47	0017
t + 216 /	↓ x	23	t + 36	r /
t + 217	+	00	0005	t + 216
t + 220	A	05	t	t + 50
t + 221	A	05	t + 1	t + 47
t + 222	A	05	0000	t + 46
t + 223 /	x,	13	s'	P /
t + 224	↓ x,	33	t + 64	
t + 225	↓ +	20	t + 46	t + 46
t + 226	+	00	0006	t + 223
t + 227	−	0	b005	t + 47
t + 230	FU	34	t + 231	t + 223
t + 231 /	A	05	t + 46	P + m n /
t + 232	↓ x	23	0020	t + 55
t + 233	1-1,	51	t + 57	t + 55
t + 234	FU	34	t + 237	t + 235
t + 235	:	02	0017	t + 57
t + 236	U2	74	−	t + 233
t + 237	+	00	0005	t + 231
t + 240	−	01	t + 54	t + 223
t + 241	−	01	0005	t + 50
t + 242	FU	34	t + 243	t + 221
t + 243	x	03	t + 42	c_2
t + 244	x,	13	t + 43	c_2 + 1
t + 245	↓ −	21	c_2	t + 47
t + 246	↓ x	23	t + 51	t + 62
t + 247	x	03	t + 43	s'
t + 250	x,	13	c_2 + 1	t + 42
t + 251	↓ x,	33	t + 51	
t + 252	↓ +	20	s'	s'
t + 253	↓ :	22	t + 51	c_2

t + 254	A	05	t + 47	c_2 + 1
t + 255	-	01	0005	t + 56
t + 256	FU	34	t + 257	t + 173
t + 257	1-1,	51	t + 57	t + 53
t + 260	FU	34	t + 261	t + 267
t + 261	:	12	t + 57	t + 53
t + 262	U1	24	t + 263	t + 57
t + 263	x	03	t + 57	t + 65
t + 264	A	05	t + 57	t + 64
t + 265	A	05	t + 15	t + 224
t + 266	U2	74	-	t + 270
t + 267	A	05	t + 16	t + 224
t + 270	U2	74	-	t + 271
t + 271	+	00	0010	t + 270
t + 272	U2	74	-	t + 134
t + 273	A	05	t + 22	t + 305
t + 274	A	05	t + 21	t + 310
t + 275	A	05	t + 1	t + 50
t + 276	1-1,	51	0005	t + 4
t + 277	FU	34	t + 300	t + 301
t + 300	+	00	0004	t + 305
t + 301	A	05	t	t + 46
t + 302	/ +,	10	r	r + n/
t + 303	U1	24	t + 304	t + 47
t + 304	:,	12	t + 47	t + 37
t + 305 /	U1	24	t + 306	t + 47
t + 306	x,	33	t + 47	
t + 307	:,	22	t + 11	
t + 310 /	x	23	P	P /
t + 311	+	00	0004	t + 302
t + 312	+	00	0006	t + 310
t + 313	-	01	0005	t + 46
t + 314	FU	34	t + 315	t + 302
t + 315	+	00	0005	t + 302
t + 316	-	01	t + 63	t + 302
t + 317	-	00	0005	t + 50
t + 320	FU	34	t + 321	t + 301
t + 321	+	00	t + 24	t + 270
t + 322	A	05	t + 25	t + 212

t + 323	U2	74	–	t + 134	
t + 324	+	00	0010	t + 270	
t + 325	U2	74	–	t + 134	
t + 326	A	05	t + 1	t + 47	
t + 327	t,	02	0003	t + 63	
t + 330	+	20	t + 30	K + 1	Konver-
t + 331	U2	74	–	K	tálás
t + 332	+	00	t + 63	K + 1	és
t + 333	–	01	0005	t + 47	kinyom-
t + 334	FU	34	t + 336	K	tatás
t + 335	01		t + 65	t + 340	
t + 336	A	05	t + 335	K + 1	
t + 337	U2	74	–	K	
t + 340	megáll				
t + 341	A	05	t + 344	t + 167	
t + 342	A	05	t + 44	t + 44	
t + 343	FU	34	t + 145	t + 166	
t + 344	U2	74	–	t + 66	

n	A	05	n + 20	t + 136
n + 1	A	05	n + 121	t + 142
n + 2	A	05	n + 122	t + 144
n + 3	A	05	n + 23	t + 176
n + 4	A	05	n + 24	t + 216
n + 5	A	05	n + 25	t + 70
n + 6	A	05	n + 26	t + 221
n + 7	A	05	n + 27	t + 220
n + 10	A	05	n + 30	t + 171
n + 11	A	05	n + 31	t + 257
n + 12	A	05	n + 32	t + 167
n + 13	A	05	n + 33	t + 172
n + 14	A	05	n + 34	t + 173
n + 15	A	05	n + 35	t + 261
n + 16	A	05	n + 36	t + 134
n + 17	U2	74	n + 37	t + 66
n + 20	A	05	t + 41	c_1
n + 21	x	23	t + 33	s

n + 22	x	23	t + 33	t + 62
n + 23	-	11	0005	t + 1
n + 24	x	23	t + 36	r
n + 25	A	05	t + 34	t + 51
n + 26	A	05	t + 1	t + 47
n + 27	A	05	t	t + 50
n + 30	A	05	t + 1	t + 56
n + 31				
n + 32	A	05	t + 31	t + 231
n + 33	A	05	t + 53	t + 57
n + 34	A	05	t + 61	t + 223
n + 135	Ul	24	t + 263	t + 57
n + 36	+	00	0005	t + 1
n + 37				
n + 40				

Bp.1958. XII.8.
Kné

V. fejezet.

Az f/x/ 0 egyenlet EDSAC-módszer szerinti közelitő megoldásának programja.

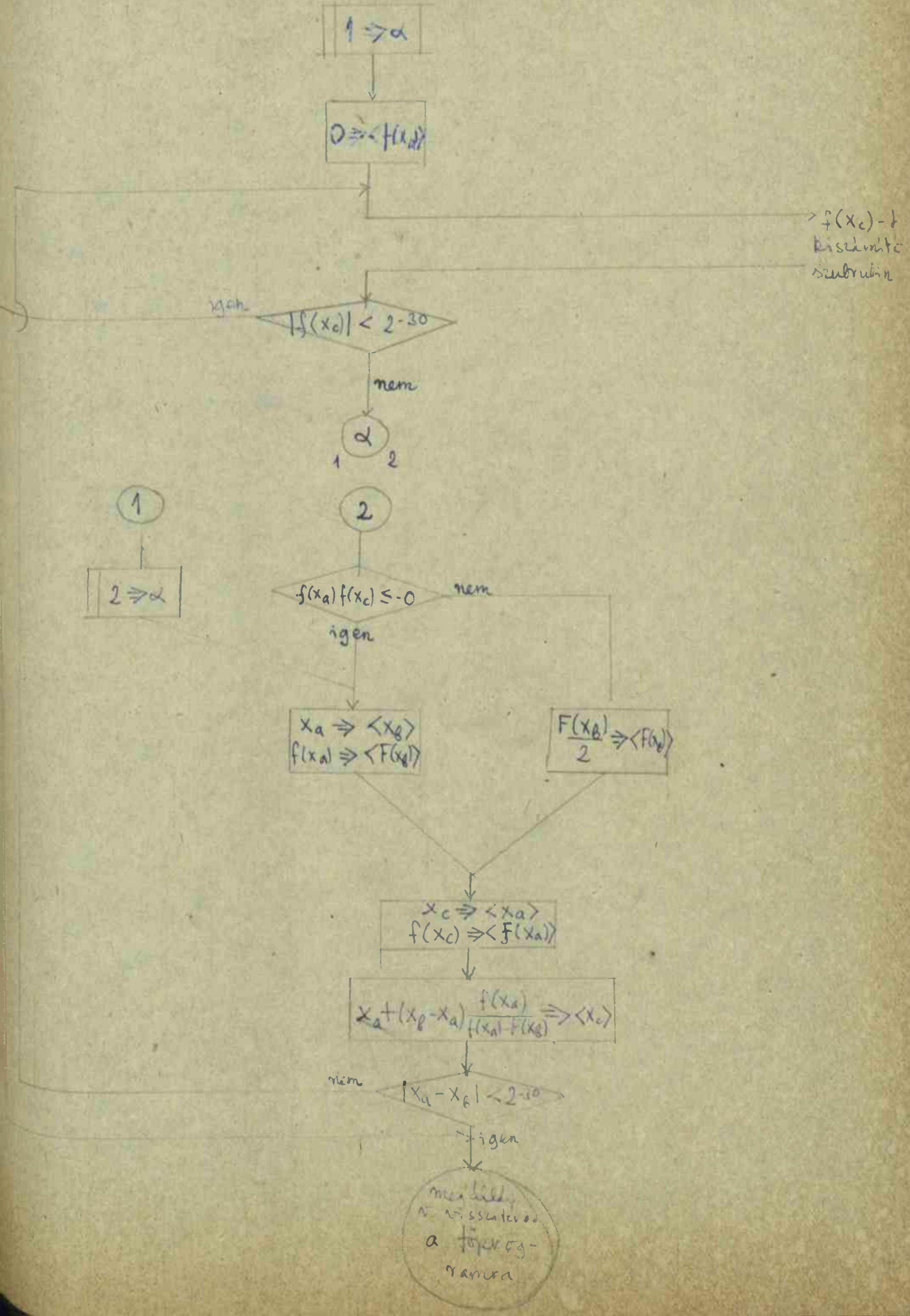
Készitette: Veidinger László
Ellenőrizte: Révész Pálné

Az f /x/ = 0 egyenlet közelitő megoldása EDSAC- módszerrel.+

A szubrutin meghatározza a /külön segédszubrutin segitségével megadott/ f /x/ függvénynek egy valós x_0 zérus helyét, ha adva van két olyan kezdőérték, x_1 és x_2, amelyekre $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ és f $/x_1/$ f$/x_2/\leq -0$. Az x_1 értéket az a + 32, az x_2 értéket a d cimü memóriarekeszben kell elhelyezni. A program fixpontos: eleve feltesszük, hogy $/x_1/, /x_2/ < \frac{1}{2}$ és az $x_1 \leq x \leq x_2$ intervallumban $/f/x// < \frac{1}{2}$. Az x_0 gyök közelitő értékét a d memóriarekeszben kapjuk meg. A program az a cimü utasitással kezdődik.

+ A módszer leirását megtalálhatjuk M.Wilkes, D.Wheeler és St.Gill "The Preparation of Programs for an Electronic Digital Computer" c.könyvében a 183.oldalon.

Menetrend.



1 ⇒ α
0 ⇒ <f(xa)>
f(xc)-t kiszámító szubrutin
igen
|f(xc)| < 2-30
nem
α
1
2
1
2
2 ⇒ α
f(xa) f(xc) ≤ 0
nem
igen
xa ⇒ <xβ>
f(xa) ⇒ <F(xβ)>
F(xβ)/2 ⇒ <F(xβ)>
xc ⇒ <xa>
f(xc) ⇒ <f(xa)>
xa + (xβ - xa) f(xa)/(f(xa) - F(xβ)) ⇒ <xc>
nem
|xa - xβ| < 2-30
igen

Program.

Előre beállitott paraméterek.

a : a szubrutin kezdete.
b : az f/x/ függvény értékét kiszámitó segédszubrutin kezdete.
c : a segédszubrutin vége.
d : x helye a segédszubrutinban.
e : f /x/ helye a segédszubrutinban.

a	Á	05	a + 30	a + 7	
a + 1	Á	05	0000	a + 33	
a + 2	+.	10	0016	a + 2	
a + 3	U1	24	b	c	
a + 4	|-|.	51	0005	e	
a + 5	FU	34	a + 27	a + 6	
a + 6	x.	13	e	a + 35	3
a + 7					
a + 10	Á	05	a + 32	a + 34	
a + 11	Á	05	a + 33	a + 35	
a + 12	U2	74	–	a + 14	
a + 13	x	03	0017	a + 35	
a + 14	Á	05	d	a + 32	
a + 15	Á	05	e	a + 33	
a + 16	–.	11	a + 32	a + 34	
a + 17	U1	24	a + 20	a + 36	
a + 20	–.	11	a + 35	a + 33	
a + 21	U1	24	a + 22	a + 37	
a + 22	:.	12	a + 37	a + 33	
a + 23	↓x.	33	a + 36	–	
a + 24	↓+	20	a + 32	d	
a + 25	|-|.	51	0005	a + 36	
a + 26	FU	34	a + 27	a + 2	
a + 27	...		...	...	
a + 30	Á	05	a + 31	a + 7	konstansok
a + 31	FU	34	a + 10	a + 13	
a + 32				x_a helye	munkarekeszek
a + 33				f/x_a/ "	
a + 34				x_b "	
a + 35				F/x_b/ "	
a + 36					
a + 37					

1959.I.5.
Kené

VI. fejezet.

Mátrix-müveletek programja kvadratikus mátrixokra.

Mátrixműveletek programja kvadratikus mátrixokra.

Készitette: Szelezsán János
Ellenörizte: Dömölki Bálint

Beprogramozzuk: mátrixok:

összeadását
" szorzását

mátrix hatványozását
" skalárral való szorzatát
" és skalár összeget
" és vektor szorzatát.

A programokat fix-ponttal készitjük el, ezért ügyelni kell arra, hogy a szereplő mátrixok elemei, s a közbülső eredmények abszolutértékben kisebbek legyenek egynél.

1. Összeadás esetén

$\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$ azaz: $[a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}]$

Ha tehát

$$|a_{ij}| < \frac{1}{2}$$

$$|b_{ij}| < \frac{1}{2} \quad \text{akkor} \quad |c_{ij}| < 1$$

2. Szorzás esetén

Ha $\underline{A} = [a_{ij}]^n$ $\underline{B} = [b_{ij}]^n$

akkor $|a_{ij}| < \frac{\sqrt{n}}{n}$

$|b_{ij}| < \frac{\sqrt{n}}{n}$ esetén

$$|c_{ik}| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |b_{jk}| <$$

$$< \sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{n} \frac{\sqrt{n}}{n} = 1.$$

3. Hatványozás esetén

$$\underline{A}^{\ell} = \underline{B}.$$

Ha $|a_{ij}| < \frac{1}{n}$ akkor

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, a_{jk}\right| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, |a_{jk}| < \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

4. Skalár és mátrix szorzása esetén:

$a\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$.

Ha $|a| < 1$, $|a_{ij}| < 1$ akkor $|b_{ij}| = |a\, a_{ij}| < 1$.

5. Mátrix és skalár összege esetén:

$\underline{\underline{A}} + b\,\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{C}}$.

Ha $|a_{ii}| = \frac{1}{2}$, $|b| < \frac{1}{2}$ akkor $|c_{ii}| = |a_{ii} + b| < 1$.

6. Mátrix és vektor szorzata /mátrix és oszlopmátrix szorzata/

$\underline{\underline{A}}\,\underline{b} = \underline{c}$

Ha $|a_{ij}| < \frac{\sqrt{n}}{n}$ $|b_j| < \frac{\sqrt{n}}{n}$ akkor

nyilván: $|c_j| < 1$.

Pozícióelosztás

A szóbanforgó mátrixmüveletek programja szubrutin jellegü. A főprogramot a következő módon rendezzük el, ha a Ø-edik utasitással mátrixmüveletet akarunk elvégezni.

(Ø - 2) =	Πc	E	0075	
/Ø - 1/ =	Πc	P	0024	
Ø =	Πy	—	0060.	

E =	Πy	24	0100 0033	$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ esetén
	Πy	24	0114 0033	$a\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}$ "
	Πy	24	0127 0033	$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ "
	Πy	24	0132 0033	$\underline{\underline{A}}^{1} = \underline{\underline{C}}$ "
	Πy	24	0173 0033	$\underline{\underline{A}} + a\,\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{C}}$ esetén.
	Πy	24	0202 0033.	$\underline{\underline{A}}\,\underline{b} = \underline{c}$ esetén.

(P) = Πy - Z, és z az a pozició, ahova a megfelelő müvelet elvégzése után a vezérlést át kell adni.

Legyen elhelyezve az

$\underline{\underline{A}}$ mátrix a d_1-től $d_1 + n^2$-1-ig terjedő

$\underline{\underline{B}}$ " a d_2-től $d_2 + n^2$-1-ig "

$\underline{\underline{C}}$ mátrix a d_3-tól $d_3 + n^2-1$-ig terjedő pozíciókban sorfolytonosságban. A d_1, d_2, d_3 címek programparaméterek.

A program 0060-tól 0075-ig terjedő utasításai az adott n paraméterből /mátrix rendje/ képezik a szükséges n -től függő konstansokat.

Mátrix és vektor szorzatánál az eredményt a $\underline{\underline{C}}$ mátrix első sorában helyezzük el.

Konstansok

```
/0001/ = 00        0000 0001
/0002/ = 00        0001 0001
/0003/ = 00        0100 0000
/0004/ =+00        0020 0000
/0005/ = 74 πγ     ———— 0150
/0006/ = 05 πc     0176 0000
/0007/ = 13 x,     0000 0000
/0010/ = 74 πγ     ———— 0146
/0011/ = 05 πc     0000 0000
/0012/ = 20 ↓+     0000 0000
/0013/ = 10 +,     0000 0000
/0015/ = 00        0001 0000
```

Paraméterek

/0016/ = n

/0017/ = $(\ell - 2)\, 2^{-30}$

/0020/ = a   /$a\underline{\Delta}$, $a + \underline{\Delta}$/

/0021/ = $d_1 \cdot 2^{-30}$

/0022/ = $d_2 \cdot 2^{-30}$

/0023/ = $d_3 \cdot 2^{-30}$

/0024/ = πγ   x   -

Munkapozíciók

```
0025    0026
        0027
        0030
        0031
        0032
        0033
        0034
```

0060	11	-,	0001	0016			
0061	24	Пy	0062	0026 →	00	0000	n-1
0062	10	+,	0016	0001			
0063	24	Пy	0064	0027 →	00	0000	n+1
0064	12	:,	0003	0016			
0065	24	Пy	0066	0030 →	00	000n	0000
0066	13	×,	0016	0016			
0067	24	Пy	0070	0034 →	00	0000	$000n^2$
0070	31	↓-,	0001				
0071	20	↓+	0030	0031 →	pp	000n	$000n^2-1$
0072	10	+,	0015	0016			
0073	24	Пy	0074	0032 →	00	0001	000n
0074	11	-,	0016	0030			
0075	24	Пy	0100	0033			
0100	12	:,	0003	0021			
0101	30	↓+,	0022	----			
0102	20	↓+	0013	0106	/+, d_1 d_2/		
0103	10	+,	0022	0023			
0104	24	Пy	0105	0107			
0105	20	↓+	0034	0121			
0106	10	(+,	/d_1	d_2/)			
0107	20	↓+	0000	d_3	Összeadás		
0110	00	+	0002	0106			
0111	00	+	0001	0107			
0112	71	↓H,	0121				
0113	34	ΣП	0106	0024			
0114	10	+,	0012	0023			
0115	24	Пy	0116	0122	konstanssal való szorzás		
0116	10	+,	0004	0007			
0117	20	↓+	0021	0121			
0120	20	↓+	0034	0106			
0121	13	×,	0020	d_1			
0122	20	↓+	0000	d_3			
0123	00	+	0001	0122			
0124	00	+	0001	0121			
0125	71	↓1-1,	0106				
0126	34	ΣП	0121	0024			
0127	05	Пr·	0000	0025			

0130	05	Пτ	0022	0106	
0131	74	Пγ	----	0134	
0132	05	Пτ	0017	0025	
0133	05	Пτ	0021	0106	
0134	05	Пτ	0023	0107	
0135	05	Пτ	0010	0145	Szorzás, hatványozás
0136	12	:,	0003	0021	
0137	20	↓+	0007	0121	
0140	05	Пτ	0106	0122	
0141	05	Пτ	0107	0106	
0142	20	↓+	0006	0161	
0143	05	Пτ	0122	0107	
0144	20	↓+	0121	0154	
0145		(		)	
0146	05	Пτ	0022	0107	
0147	05	Пτ	0005	0145	
0150	05	Пτ	0026	0216	
0151	05	Пτ	0026	0215	
0152	05	Пτ	0026	0214	
0153	05	Пτ	0000	0176	
0154		(	....	....)	
0155	20	↓+	0176	0176	
0156	00	+	0032	0154	
0157	01	−	0001	0214	
0160	34	ΥП	0161	0154	
0161		(....		....)	
0162	01	−	0031	0154	
0163	00	+	0001	0161	
0164	01	−	0001	0215	
0165	34	ΥП	0166	0152	
0166	00	+	0033	0154	
0167	01	−	0001	0216	szorzás hatványozás
0170	34	ΥП	0171	0151	
0171	01	−	0001	0025	
0172	34	ΥП	0024	0140	
0173	10	+,	0004	0021	
0174	24	Пγ	0175	0176	
0175	20	↓+	0034	0106	
0176		(		)	
0177	00	+.	0027	0176	

Mátrix és vektor szorzata

0200	71	↓I-1,	0106	----
0201	34	ΣΠ	0176	0024
0202	12	:,	0003	0022
0203	30	↓+,	0021	----
0204	20	↓+	0007	0215
0205	20	↓+	0030	0106
0206	10	+,	0011	0023
0207	24	Πy	0210	0214
0210	12	:,	0003	0023
0211	30	↓+,	0023	
0212	20	↓+	0012	0216
0213	20	↓+	0030	0107
0214	05	Πz	0000	d_3
0215	13	×,	d_2	d_1
0216	20	↓+	d_3	d_3.
0217	00	+	0002	0215
0220	71	↓I-1,	0106	
0221	34	ΣΠ	0215	0222
0222	01	−	0030	0215
0223	00	+	0002	0216
0224	00	+	0001	0214
0225	71	↓I-1,	0107	
0226	34	ΣΠ	0214	0024
0227				

VII. fejezet.

Lineáris algebrai feladatok programjai.

Szelezsányi
Készitette: Weidinger László
Ellenőrizte: Szelezsán János

VII. 1. Lineáris egyenletrendszerek
megoldása a Gauss-Seidel-féle iterációs módszerrel.[x]

A program segitségével megoldhatjuk az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert abban az esetben, ha: $n\leq 40$, az egyenletrendszer $\underline{\underline{A}}$ mátrixa nem-szinguláris, pozitiv definit és $|a_{ij}|<1$.

A program elkészitésénél feltettük, hogy az egyenletrendszer a_{ij} együtthatója /$i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,n$/ fixpontos bináris alakban a 0377+/i-1/n+j pozicióban, a b_k állandó /$k=1,\dots,n$/ pedig lebegőpontos bináris alakban a 35oo+2k-2 és a 35oo+2k-1 poziciókban van elhelyezve. A megoldás kezdeti értékét, /$x_1^{/0/},\dots,x_n^{/0/}$/-t lebegőpontos bináris alakban a 3650,3651,...,3650+2n-2,3650+2n-1 poziciókba visszük be; a program végrehajtása során ugyanezekben a poziciókban kapjuk meg a megoldás közelitéseit, végül pedig magát a megoldást.

---

[x] A Gauss-Seidel-féle iterációs módsher leirását megtalálhatju pl.L.Fox:"Practical solution of linear equations and inversion of matrices" cimü cikkében a Contributions to the Solution of Systems of Linear Equations and the Determination of Eigenvalues c. gyüjteményben /Nat.Bureau of Standards Applied Math.Series.39.1954./

K o n s t a n s o k

/ooo1/=		+oo	oooo	ooo1
/ooo2/=		+1o	oooo	oooo = $\frac{1}{2}$
/ooo3/=		+oo	ooo2	oooo
/ooo4/=		+oo	ooo1	oooo
/ooo5/=		+oo	oooo	oo34
/ooo6/=		+oo	ooo4	oooo
/ooo7/=		+oo	oooo	ooo2
/oo1o/=		+oo	oooo	oo27
/oo11/=		+oo	o1oo	oooo = 2^{-12}
/oo12/=	П4	o5	o4o1	oo44
/oo13/=	П4	o5	oo42	365o
/oo14/=	П4	o5	365o	oo4o
/oo15/=		-oo	oooo	7775
/oo16/=	П4	o5	o4oo	oo4o

P a r a m é t e r

/oo3o/=	+oo	n	oooo

M u n k a p o z í c i ó k

oo4o, oo41, oo42, oo43, oo44, oo45, oo46, oo47, oo5o, oo51
oo52, oo53

Program

0076	+,	10	0030	0004	
0077	ПУ	24	0100	0051	/00 n+1 0000/
0100	:,	12	0002	0030	
0101	↓−	21	0003	0050	/00 2n-2 0000/
0102	↓×	23	0011	0053	/00 0000 2n-2/
0103	↓+	20	0013	0052	/ПУ 0042 3650+2n-2/
0104	+,	10	0050	0014	
0105	ПУ	24	0106	0045	/ПУ 3650+2n-2 0040/
0106	ПУ	05	0012	0116	
0107	ПУ	05	0016	0157	
0110	ПУ	05	0014	0046	
0111	ПУ	05	0000	0047	
0112	(ПУ	05	3500	0042)	
0113	(ПУ	05	3501	0043)	
0114	(ПУ	05	3652	0040)	
0115	(ПУ	05	3653	0041)	
0116	(			)	
0117	↓|×|,	73	0040	----	
0120	↓|−|,	71	0001	----	
0121	УП	34	0151	0122	
0122	|−|,	51	0002	0044	
0123	УП	34	0124	0127	
0124	:	02	0002	0044	
0125	−	01	0001	0041	
0126	ПУ	74	----	0122	
0127	×	03	0044	0040	

0130	−	01	0043	0041
0131	X	03	0002	0042
0132	+	00	0001	0043
0133	−	01	0001	0041
0134	УП	34	0135	0131
0135	+	00	0001	0041
0136	УП	34	0137	0141
0137	X	03	0002	0040
0140	ПУ	74	----	0135
0141	−	01	0040	0042
0142	↓|-|,	71	0001	----
0143	УП	34	0151	0144
0144	|-|,	51	0002	0042
0145	УП	34	0146	0151
0146	:	02	0002	0042
0147	−	01	0001	0043
0150	ПУ	74	----	0144
0151	(|-|,	51	0045	0114)
0152	(УП	34	0153	0157)
0153	+	00	0003	0114
0154	+	00	0003	0115
0155	+	00	0004	0116
0156	ПУ	74	—	0114
0157	(			)
0160	|-|,	51	0040	0042
0161	(УП	34	0171	0162)

0162	X	03	0002	0042
0163	+	00	0001	0043
0164	+	00	0015	0161
0165	:	02	0002	0040
0166	+	00	0001	0043
0167	ПУ	74	----	0160
0170	−	01	0015	0161
0171	:	02	0040	0042
0172	(↓−,	31	3650	----)
0173	↓I−I,	71	0001	----
0174	УП	34	0175	0202
0175	(−,	11	3651	0043)
0176	↓I−I,	71	0001	----
0177	УП	34	0200	0202
0200	+	00	0004	0047
0201	ПУ	74	----	0204
0202	(ПУ	05	0042	3650)
0203	(ПУ	05	0043	3651)
0204	(ПУ	74	----	0205)
0205	−	01	0050	0114
0206	−	01	0050	0115
0207	+	00	0003	0112
0210	+	00	0003	0113
0211	+	00	0004	0116
0212	+	00	0004	0151
0213	+	00	0005	0152
0214	ПУ	74	----	0112

0215	+	00	0006	0114
0216	+	00	0006	0115
0217	+	00	0003	0116
0220	+	00	0051	0157
0221	+	00	0003	0172
0222	+	00	0003	0175
0223	+	00	0007	0202
0224	+	00	0007	0203
0225	−	01	0004	0151
0226	−	01	0005	0152
0227	+	00	0003	0046
0230	|-|,	51	0052	0202
0231	УП	34	0114	0232
0232	+	00	0010	0204
0233	ПУ	74	----	0157
0234	−	01	0050	0112
0235	−	01	0050	0113
0236	−	01	0050	0114
0237	−	01	0050	0115
0240	−	01	0050	0172
0241	−	01	0050	0175
0242	−	01	0053	0202
0243	−	01	0053	0203
0244	−	01	0010 ~~00[illegible]~~	0204
0245	|-|,	51	0030	0047
0246	УП	34	0106	0247
0247				

Veidinger László

Készitette: Veidinger László
Ellenőrizte: Lőcs Gyula
Lőcs Gyula

VII. 2. Mátrix inverzió
a Jordan-féle eliminációs módszerrel*
/főelemek kiválasztásával/.

A program segitségével meghatározhatjuk az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nem szinguláris négyzetes mátrix inverzét. /Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix szinguláris, a gép a program végrehajtása közben automatikusan megáll./

A program elkészitésénél feltettük, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrix lebegőpontos bináris alakban megadott a_{ij} elemének /i,j=1,...,n/ mantisszája a b+2/i-1/n+2/j-1/, kitevője a b+2/i-1/+2j-1 cimű memóriarekeszben van elhelyezve. Az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix $\bar{a}_{ij}$ elemének mantisszáját, illetve kitevőjét ugyanezekben a rekeszekben kapjuk meg /az eredeti matrix elemei tehát törlődnek a memóriából./

A program n eliminációs lépést hajtat végre, az i-edik lépésben / i=1, ..., n/ a gép az $\underline{\underline{A}}_{i-1}$ mátrixból /$\underline{\underline{A}}_0$=$\underline{\underline{A}}$/ a következőképpen késziti el az $\underline{\underline{A}}_i$ mátrixot:

a./ Az $\underline{\underline{A}}_i$ mátrix i-edik oszlopában az utolsó n-i+1 elem közül kiválasztja a legnagyobb abszolut értékűt; legyen ez a k_i-edik sorban.

b./ Az $\underline{\underline{A}}_i$ mátrix i-edik sorát felcseréli a k_i-edik sorral.

c./ A kapott mátrix i-edik sorának az i-edik kivételével minden egyes elemét elosztja α_i-vel, az i-edik elem helyére $\frac{1}{\alpha_i}$-t ir be. /$\alpha_1, \cdots \alpha_n$-nel jelöljük rendre a mátrix i-edik oszlopának elemeit./

d./ Az igy kapott mátrix j-edik sorának /j=1,..., i-1, i+1, ... n /az i-edik kivételével minden egyes eleméhez hozzáadja az i-edik sor megfelelő elemének $-\alpha_j$-szeresét, az i-edik elem

* A Jordan-féle eliminációs módszer leirását /főelemek kiválasztása nélkül/ megtalálhatjuk pl. A. S. Householder: Principles of Numerical Analysis /New York, 1953; orosz forditásban Osznovi csiszlennovo analiza, Moszkva, 1956./ cimű könyvében/ az orosz kiadásban 88-90 old./

helyére $-\frac{\alpha_i}{\alpha_k}$-t ír be.

A gép ezután az $\underline{\underline{A}}_n$ mátrix első oszlopát felcseréli a k_1-edik oszloppal, majd az így nyert mátrixban a második oszlopot a k_2-edik oszloppal, ...,végül n ilyen oszlopcsere után megkapja az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrixot.

Program.

a	:,	12	0017	a+216	
a+1	U1	24	a+2	a+231	/00 0000 2 n/
a+2	↓:	22	0003	a+232	/00 2n 0000/
a+3	↓+	2o	a+215	a+241	/00 b+2n 0000/
a+4	:,	12	0004	a+216	
a+5	↓ x	23	a+232	a+233	/00 0000 2 n^2/
a+6	:	22	0003	a+234	/00 2 n^2 0000/
a+7	+	20	a+223	a+235	/A b+2n^2+1 i + 3/
a+1o	Á	05	0000	a+236	
a+11	Á	05	0000	a+237	
a+12	Á	05	a+225	a+63	
a+13	↓ +	20	0006	a+64	
a+14	Á	05	a+215	a+24o	
a+15	Á	05	a+217	$g+1_1$	
a+16	Á	05	a+22o	$g+1_2$	
a+17	+,	10	a+236	a+223	
a+2o	↓+	20	a+237	a+26	
a+21	↓-	21	0006	a+25	
a+22	U1	24	a+23	a+135	
a+23	Á	05	a+24o	a+116	
a+24	Á	05	0000	i	
a+25	/				/
a+26	/				/
a + 27	U2	74	---	g	
a + 3o	Á	05	i+2	i	
a + 31	Á	05	i+3	i+1	

Az $\underline{\underline{A}}_i$ mátrix i-edik oszlopában az utolsó n-i+1 elem közül kiválasztjuk a legnagyobb abszolut értékűt. Legyen ez a k_i-edik sorban.

a+32	Á	05	a+116	j	
a+33	L,	16	0012	a+25	
a+34	↓-	21	a+237	a+117	
a+35	+	00	0007	a+116	
a+36	+	00	a+232	a+25	
a+37	↓+	20	0006	a+26	
a+4o	↓I-I,	71	a+235	--	
a+41	FU	34	a+25	a+42	
a+42	+,	1o	a+236	a+215	Az $\underline{\underline{A}}_i$ mátrix i-edik
a+43	U1	24	a+44	a+131	sorát felcseréljük a
a+44	↓+	2o	a+232	a+25	k_i-edik sorral.
a+45	Á	05	a+117	a+132	
a+46	Á	05	a+221	c+12	
a+47	U2	74	--	c	
a+5o	+	00	0004	a+132	
a+51	+	00	0004	a+131	
a+52	↓I-I,	71	a+25	--	
a+53	FU	34	a+47	a+54	
a+54	Á	05	i	i+2	A kapott mátrix i-edik so-
a+55	Á	05	i+1	i+3	rának az i-edik kivételé-
a+56	Á	05	a+222	h+1	vel minden egyes elemét el-
a+57	+	00	a+227	a+25	osztjuk α_i-vel, az i-edik
a+6o	-,	11	a+135	a+63	elem helyébe $\frac{1}{\alpha_i}$-t irunk
a+61	↓I-I,	71	0004	--	/$\alpha_1, \dots, \alpha_n$-nel jelöljük
a+62	FU	34	a+66	a+63	rendre, a mátrix i-edik
a+63	/Á	05	b	i /	oszlopának elemeit./
a+64	/Á	05	b+1	i+1 /	
a+65	U2	74	--	f	
a+66	Á	05	0017	i	
a+67	Á	05	0005	i+1	
a+7o	U2	74	--	f	
a+71	/Á	05	i	b /	
a+72	/Á	05	i+1	b+1/	
a+73	+	00	0010	a+71	
a+74	↓+	2o	0006	a+72	
a+75	+	00	0007	a+63	
a+76	↓+	2o	0006	a+64	

a+77	↓|-|,	71	a+25	----
a+1oo	FU	34	a+6o	a+1o1
a+1o1	Á	05	a+223	a+132
a+1o2	↓-	21	0006	a+131
a+1o3	Á	05	a+224	a+135
a+1o4	↓+	2o	0006	a+136
a+1o5	+,	1o	a+237	a+223
a+1o6	U1	24	a+1o7	a+121
a+1o7	↓-	21	0006	a+12o
a+11o	+,	1o	a+236	a+225
a+111	U1	24	a+112	a+116
a+112	↓+	2o	0006	a+117
a+113	-,	11	a+131	a+116
a+114	↓|-|,	71	0004	--
a+115	FU	34	a+147	a+116
a+116	/			/
a+117	/			/
a+12o	/			/
a+121	/			/
a+122	+,	1o	0016	a+122
a+123	U1	24	e	h+1
a+124	-,	11	i	0000
a+125	U1	24	a+126	i
a+126	-,	11	a+131	a+12o
a+127	↓|-|,	71	ooo5	---
a+13o	FU	34	a+135	a+131
a+131	/			/
a+132	/			/
a+133	+,	1o	oo16	a+133
a+134	U1	24	d	h+1
a+135	/			/
a+136	/			/
a+137	+	00	0007	a+131
a+14o	↓+	2o	ooo6	a+132
a+141	+	00	0010	a+135

Az igy kapott mátrix j-edik sorának /j=1, ... ,i-1, i+1, ..., n/ az i-edik kivételével minden egyes eleméhez hozzáadjuk az i-edik sor megfelelő elemének $-\alpha_j-$ szeresét az i-edik elem helyébe $-\frac{\alpha_j}{\alpha_i}$ -t irunk,/

a + 142	↓+	2o	0006	a+136	
a + 143	+	00	0007	a+116	
a + 144	↓+	20	0006	a+117	
a + 145	↓l-l,	71	a+25	--	
a + 146	FU	34	a+116	a+153	
a + 147	+	00	a+232	a+131	
a + 15o	↓+	20	0006	a+132	
a + 151	+	00	a+231	a+135	
a + 152	↓+	20	0006	a+136	
a + 153	+	00	a+232	a+12o	
a + 154	↓+	20	0006	a+121	
a + 155	↓l-l,	71	a+235	--	
a + 156	FU	34	a+11o	a+157	
a + 157	+	00	a+232	a+236	
a + 16o	+	00	0007	a+24o	vége van-e az eliminációnak?
a + 161	+	00	0005	a+32	
a + 162	+	00	0007	a+237	
a + 163	↓l-l,	71	a+232	--	
a + 164	FU	34	a+17	a+165	
a + 165	Á	05	a+215	a+25	Az $\underline{\underline{A}}_n$ mátrix oszlopait megfelelő módon felcserélve megkapjuk az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrixot.
a + 166	Á	05	a+226	a+171	
a + 167	-	01	0004	a+232	
a + 17o	+	00	a+215	a+234	
a + 171	/				
a + 172	Á	05	a+25	a+132	
a + 173	+,	1o	0016	a+173	
a + 174	U1	24	c	c+12	
a + 175	+	00	0004	a+131	
a + 176	+	00	0004	a+132	
a + 177	+	00	a+23o	c+12	
a + 2oo	U2	74	--	c	
a + 2o1	+	00	a+232	a+131	
a + 2o2	+	00	a+232	a+132	
a + 2o3	↓l-l.	71	a+234	--	
a + 2o4	FU	34	a+173	a+2o5	
a + 2o5	+	00	0004	a+171	
a + 2o6	+	00	0007	a+25	
a + 2o7	↓l-l,	71	a+234	--	

a+21o	FU	34	a+171	a+211	
a+211	-	01	a+233	a+71	utasítások helyreállítá-
a+212	↓ +	2o	0006	a+72	sa
a+213	-	01	a+216	a+32	
a+214	..	..	......	...	visszaugrás a főprogramra.
a+215		00	b	0000	
a+216		00	0000	n	
a+217	U2	74	---	a+3o	
a+22o	U2	74	---	a+35	
a+221	U2	74	---	a+5o	konstansok
a+222	U2	74	---	a+71	
a+223	Á	05	b+1	1+3	
a+224	Á	05	1	b	
a+225	Á	05	b	i	
a+226	Á	05	j	a+131	
a+227	Á	05	0000	1	
a+23o		+00	0000	0004	
a+231					
a+232					
a+233					
a+234					munkarekeszek
a+235					
a+236					
xxxxx					
xxxxx					
a+237					
a+24o					
a+241					

Előre beállított /preset/ paraméterek

a- a szubrutin kezdete,

b- a_{11} mantisszájának címe,

c- a segéd szubrutin kezdete,

d- a lebegő-pontos összeadás kezdete,

e- " " szorzás " ,

f- " " osztás " ,

g- " " komparáció " ,

h- a normalizálás kezdete,
i- a lebegőpontos "első komponens" helyének kezdete,
j- külön munkarekeszek kezdete,
/n= a mátrix rendszáma./

c	I,	. .16	0014	c+7
c+1	↓+	20	a+131	c+7
c+2	x,	13	0003	a+131
c+3	↓+,	30	a+132	---
c+4	↓+	20	c+13	c+1o
c+5	x,	13	0003	a+132
c+6	↓+	20	c+14	c+11
c+7	/Á	05	0000	a+136 /
c+1o	/			/
c+11	/			/
c+12	. .		. . . .	. . . .
c+13	Á	05	0000	0000
a+14	Á	05	a+136	0000

segédszubrutin: elvégzi az a +131 és a +132 címek alatt lévő címek tartalmának kicserélését.

segédszubrutin konstansai.

Budapest, 1959. január 1o.

MJné.

VIII. fejezet.

Általános lineáris programozási feladat szimplex módszer szerinti megoldásának programja.

Révész Pálné
Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte: Sándor Ferenc

Általános lineáris programozási feladat megoldása szimplex módszer segitségével

A lineáris programozási feladat általános alakjában az $x=/x_1,x_2,\ldots,x_n/$ vektornak a következő kikötéseknek kell eleget tennie:

1./ $x_i \geq 0$, $/i=1,2,\ldots,n/$, azaz az $\underline{x}$ vektor minden koordinátája nem negativ.

2./
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqq a_{10}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqq a_{20}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqq a_{m0}$$

azaz az $\underline{\underline{A}}\underline{x} \leqq \underline{a}_0$ egyenlőtlenségrendszert kielégiti, és

3./ $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = max$

azaz a /3/ lineáris függvény maximumát keressük a /1/ és /2/ feltételek mellett.

A feladatot a szimplex módszer segitségével oldjuk meg. Az egyenlőtlenségrendszert segédváltozók bevezetésével egyenletrendszerré alakitjuk át. Kiinduló bázismegoldásnak pedig azt a megoldást választjuk, amikor csak a segédváltozóknak adunk értékeket, a többi változó pedig 0-val egyenlő. Ezután mechanikusan alkalmazzuk a szimplex módszert.

Az eljárást befejezzük:

1./ Ha már minden $c_i - d_i \leq 0$. Ekkor az utolsó bázismegoldás az optimális megoldás;

2./ Ha pozitiv $c_i - d_i$-hez tartozó oszlopban az összes koordináták nem pozitivek. Ekkor a lehetséges megoldások halmaza nem korlátos és igy optimális megoldás nem létezik.

3./ Ha pozitiv $c_i - d_i$-hez tartozó oszlopban a megfelelő δ-k minimuma kétszer szerepel. Ekkor ugyanis a degeneráció esete áll fenn és ezzel az esettel ebben a programban nem foglalkozunk.

A számokat lebegőpontos alakban tesszük be a gépbe /$d.2^q$/, tehát minden szám 2 memóriapoziciót foglal el, még pedig a számok mantisszája mindig a páros, a kitevője pedig a páratlan számu pozicióban van. A lebegőpontos müveleteket ugy végezzük el, hogy minden müveletnél külön behivjuk a megfelelő lebegőpontos szubrutint. /A használt jelölések megegyeznek a Krekó-Bacskay könyv jelöléseivel/.

Előkészítő rutin

0001	:)	12	0552	0550
0002	ΠY	24	0003	0573
0003	↓:	22	0505	0574
0004	−)	11	0553	0573
0005	ΠY	24	0006	0575
0006	↓:	22	0505	0576
0007	−)	11	0504	0573
0010	ΠY	24	0011	0577
0011	↓:	22	0505	0600
0012	+)	10	0577	0561
0013	ΠY	24	0014	0425
0014	↓+	20	0461	0426
0015	↓+	20	0564	0440
0016	↓−	21	0555	0437
0017	−)	11	0576	0554
0020	ΠY	24	0021	0427
0021	↓+	20	0557	0431
0022	+)	10	0600	0567
0023	ΠY	24	0024	0433
0024	↓+	20	0555	0434
0025	−)	11	0571	0573
0026	ΠY	24	0027	0601
0027	↓:	22	0505	0602
0030	+)	10	0576	0575
0031	ΠY	24	0032	0454
0032	:)	12	0551	0461
0033	ΠY	24	0034	0605
0034	:)	12	0605	0573
0035	ΠY	24	0036	0603
0036	↓:	22	0505	0604
0037	↓+)	30	0554	----
0040	↓−	21	0575	0455
0041	ΠY	05	0576	0456

0042	—)	11	0504	0550
0043	ПУ	24	0044	0460
0044	+)	10	0572	0604
0045	ПУ	24	0046	0464
0046	+)	10	0556	0604
0047	ПУ	24	0050	0466
0050	↓+	20	0501	0474
0051	—)	11	0501	0554
0052	↓+	20	0601	0476
0053	+)	10	0574	0573
0054	ПУ	24	0055	0502
0055	+)	10	0604	0574
0056	ПУ	24	0057	0514
0057	↓×	23	0505	0516
0060	↓+	20	0514	0515

0061	+)	10	0554	0574
0062	↓−	21	0575	0122
0063	↓+	20	0557	0124
0064	+)	10	0574	0556
0065	ПУ	24	0066	0306
0066	↓+	20	0555	0307
0067	↓+	20	0576	0143
0070	↓−	21	0575	0142
0071	+)	10	0576	0561
0072	↓−	21	0575	0253
0073	↓+	20	0555	0254
0074	+)	10	0573	0563
0075	ПУ	24	0076	0312
0076	↓+	20	0555	0313
0077	+)	10	0122	0602
0100	↓+	20	0601	0452
0101	+)	10	0556	0602
0102	ПУ	24	0120	0471

d_1-k kiszámitása, c_1-d_1-k képzése és vizsgálata

0120	ПЧ	05	0000	0520
0121	ПЧ	05	0000	0521
0122	(			)
0123	ПУ	24	0124	p
0124	(			)
0125	ПУ	24	0126	p+1
0126	ПЧ	05	0450	norm. szubrutin vége
0127	ПУ	74	----	norm. szubrutin kezdete
0130	ПЧ	05	0520	q
0131	ПЧ	05	0521	q+1
0132	ПЧ	05	0451	összeadó szubrutin vége
0133	ПУ	74	----	összeadó szubrutin kezdete
0134	ПЧ	05	p	0520
0135	ПЧ	05	p+1	0521
0136	+	00	0477	0122
0137	+	00	0477	0124
0140	−)	11	0122	0452
0141	УП	34	0142	0122

d_1-k kiszámitása

0142	(			)	
0143	(			)	
0144	ПЧ	05	0520	q	
0145	ПЧ	05	0521	q+1	
0146	ПЧ	05	0453	kivonó szub-rutin vége	
0147	ПУ	74	----	kivonó szub-rutin kezdete	
0150	—,	11	0461	p	
0151	УП	34	0152	0165	
0152	—	01	0454	0122	c_i-d_i-k képzése
0153	—	01	0454	0124	és vizsgálata
0154	+	00	0574	0122	
0155	+	00	0574	0124	
0156	+	00	0574	0452	
0157	+	00	0574	0142	
0160	+	00	0574	0143	
0161	—,	11	0122	0455	
0162	УП	34	0425	0120	

δ_{ik}-k kiszámítása és a $\min\limits_{k} \delta_{ik} = \delta$ megkeresése

/degeneráció és nem korlátos T tartomány esetén a gép megáll/

o165	∧,	16	o122	o457
o166	↓−	21	o456	o522
o167	Π4	o5	o61o	o523
o17o	Π4	o5	o61o	o524
o171	Π4	o5	o461	o6o7
o172	+	oo	o522	o2oo
o173	+	oo	o522	o2o4
o174	+	oo	o522	o2o5
o175	Π4	o5	o46o	o526
o176	−	ol	o461	o526
o177	YΠ	34	o237	o2oo
o2oo	+,	lo	oooo	o6o6
o2ol	YΠ	34	o231	o2o2
o2o2	Π4	o5	o75o	p
o2o3	Π4	o5	o751	p+l
o2o4	Π4	o5	oooo	q
o2o5	Π4	o5	oool	q+l
o2o6	Π4	o5	o462	osztó szub-rutin vége

o2o7	ПУ	74	----	osztó szubrutin kezdete
o21o	ПЧ	o5	o523	q
o211	ПЧ	o5	o524	q+1
o212	ПЧ	o5	p	o523
o213	ПЧ	o5	p+1	o524
o214	ПЧ	o5	o463	kivonó szub-rutin vége
o215	ПУ	74	----	kivonó szub-rutin kezdete
o216	+,	lo	oooo	p
o217	УП	34	o22o	o223
o22o	Λ,	16	o457	o2oo
o221	↓−	21	o522	o525
o222	ПУ	74	----	o23o
o223	−,	11	o461	p
o224	УП	34	o225	o226
o225	ПЧ	o5	o525	o6o7
o226	ПЧ	o5	q	o523
o227	ПЧ	o5	q+1	o524
o23o	+	oo	o5o1	o2oo
o231	+	oo	o5o1	o2o2
o232	+	oo	o5o1	o2o3
o233	+	oo	o5o1	o2o4
o234	+	oo	o5o1	o2o5
o235	ПУ	74	----	o176
o236	|−|,	51	o524	o61o
o237	↓|−|,	71	o461	----
o24o	УП	34	o446	o241
o241	|−|,	51	o525	o6o7
o242	↓|−|,	71	o461	----
o243	УП	34	o447	o245

A bázisvektor kicserélése és a kiválasztott sor elsővé tétele

0245	X_1	13	0525	05o5	
0246	ПУ	24	0247	0527	
0247	+	oo	0522	0253	
025o	+	oo	0527	0253	A bázisvektor kicserélése
0251	+	oo	0522	0254	
0252	+	oo	0527	0254	
0253	(			)	
0254	(			)	
0255	+	oo	0525	0263	
0256	+	oo	0525	0264	
0257	+	oo	0527	0265	
026o	+	oo	0527	0266	
0261	П4	o5	075o	053o	
0262	П4	o5	0751	0531	A kiválasztott sor elsővé tétele
0263	П4	o5	075o	075o	
0264	П4	o5	0751	0751	
0265	П4	o5	053o	075o	
0266	П4	o5	0531	0751	
0267	+	oo	0574	0261	
027o	+	oo	0574	0262	
0271	+	oo	05o2	0263	
0272	+	oo	05o2	0264	

0273	+	00	0573	0265
0274	+	00	0573	0266
0275	−)	11	0261	0464
0276	УП	34	0300	0261

δ_k-k kiszámitása és helyretétele.

0300	ПЧ	05	0523	0750
0301	ПЧ	05	0524	0751
0302	+	00	0522	0304
0303	+	00	0522	0305
0304	ПЧ	05	0000	q
0305	ПЧ	05	0001	q+1
0306	(			)
0307	(			)
0310	ПЧ	05	0465	osztó szub-rutin vége
0311	ПУ	74	----	osztó szubrutin kezdete
0312	(			)
0313	(			)
0314	+	00	0574	0306
0315	+	00	0574	0307
0316	+	00	0573	0312
0317	+	00	0573	0313
0320	—)	11	0306	0466
0321	УП	34	0322	0306

A szimplex táblázat többi elemének kiszámítása

0322	+	00	0522	0324
0323	+	00	0522	0325
0324	ПЧ	05	0002	q
0325	ПЧ	05	0003	q+1
0326	ПЧ	05	0750	p
0327	ПЧ	05	0751	p+1
0330	ПЧ	05	0467	szorzó szubr. vége
0331	ПУ	74	----	szorzó szubr. kezdete
0332	ПЧ	05	p	q
0333	ПЧ	05	p+1	q+1
0334	ПЧ	05	0752	p
0335	ПЧ	05	0753	p+1
0336	ПЧ	05	0470	kivonó szubr. vége
0337	ПУ	74	----	kivonó szubr. kezdete
0340	ПЧ	05	p	0752
0341	ПЧ	05	p+1	0753
0342	+	00	0501	0324
0343	+	00	0501	0325
0344	+	00	0501	0334
0345	+	00	0501	0335
0346	+	00	0504	0340
0347	+	00	0504	0341
0350	−,	11	0334	0471

0351	УП	34	0352	0324
0352	—	01	0602	0324
0353	—	01	0602	0325
0354	—	01	0602	0334
0355	—	01	0602	0335
0356	—	01	0601	0340
0357	—	01	0601	0341
0360	+	00	0574	0326
0361	+	00	0574	0327
0362	+	00	0574	0334
0363	+	00	0574	0335
0364	+	00	0573	0340
0365	+	00	0573	0341
0366	+	00	0574	0471
0367	¬	11	0334	0474
0370	УП	34	0371	0324

Megváltoztatott utasítások helyreállítása

o371	∧	o6	o512	o2oo
o372	∧	o6	o512	o2o4
o373	∧	o6	o512	o2o5
o374	+	oo	o544	o2o5
o375	–	o1	o576	o2o2
o376	–	o1	o576	o2o3
o377	–	o1	o525	o263
o4oo	–	o1	o525	o264
o4o1	–	o1	o527	o265
o4o2	–	o1	o527	o266
o4o3	–	o1	o514	o261
o4o4	–	o1	o514	o262
o4o5	–	o1	o515	o263
o4o6	–	o1	o515	o264
o4o7	–	o1	o516	o265
o41o	–	o1	o516	o266
o411	∧	o6	o512	o3o4
o412	∧	o6	o512	o3o5
o413	+	oo	o544	o3o5
o414	–	o1	o522	o324
o415	–	o1	o522	o325

0416	—	01	0514	0326
0417	—	01	0514	0327
0420	—	01	0514	0334
0421	—	01	0514	0335
0422	—	01	0516	0340
0423	—	01	0516	0341
0424	TTY	74	----	0061

A T függvény kiszámítása.

o425	(			)
o426	(			)
o427	(			)
o43o	ΠY	24	o431	p
o431	(			)
o432	ΠY	24	o433	p+1
o433	(			)
o434	(			)
o435	ΠЧ	o5	o475	összeadó szub-rutin vége
o436	ΠY	74	----	összeadó szub-rutin kezdete
o437	(			)
o44o	(			)
o441	+	oo	o477	o427
o442	+	oo	o477	o431
o443	−)	11	o427	o476
o444	YΠ	34	o445	o427
o445	megállás			
o446	Nincs megoldás /megállás/			
o447	Degenerált megállás			

Konstansok

/o45o/=	ПУ	74	----	o13o
/o451/=	ПУ	74	----	o134
/o453/=	ПУ	74	----	o15o
/o457/=		oo	7777	oooo
/o461/=		oo	oooo	$ooo1 = 2^{-3o}$
/o462/=	ПУ	74	----	o[illegible]lo
/o463/=	ПУ	74	----	o216
/o465/=	ПУ	74	----	o312
/o467/=	ПУ	74	----	o332
/o47o/=	ПУ	74	----	o34o
/o475/=	ПУ	74	----	o437
/o477/		oo	ooo2	ooo2
/o5o1/=		oo	ooo2	oooo
/o5o4/=		oo	oooo	ooo2
/o5o5/=	2^{-12}			
/o512/=		77	7777	7777
/o544/=	2^{-18}			
/o55o/=	$k.2^{-30}$			
/o551/=	$n.2^{-3o}$			
/o552/=	$\frac{1}{2}$			
/o553/=	4.2^{-30}			
/o554/=	x_{1}	13	o75o	o75o
/o555/=		oo	ooo1	ooo1
/o556/=	ПЧ	o5	o75o	p
/o557/=		-o2	7776	7777
/o561/=	ПЧ	o5	oooo	o75o
/o563/=	ПЧ	o5	p	o75o

/0564/=		00	p+1	0000
/0566/=		05	0000	0751
/0567/=		05	0750	q
/0571/=	6.2^{-30}			
/0572/=		05	0750	0530
/0606/=	–	00	0000	0000
/0610/=		77	7777	7777

Munkapoziciók

0452,0454,0455,0456,0460,0464,0466,0471,0472, 0473,0474,0476,0502,0513,0514,0515,0516,0541 0542,0520,0521,0522,0523,0524,0525,0526,0527 0530,0531,0573,0574,0575,0576,0577,0600,0601, 0602,0603,0604,0605,0607.

A szimplex táblázat elemei ugy vannak belehelyezve a memóriába, hogy az.a_0 a 0750-es memóriapozicióba kerüljön. A lebegőpontos szubrutinok a p, p+1 q,q+1 poziciókban foglalt mennyiségek között végzik el a müveletet és az eredmény mindig a p,p+1-be kerül. A normalizáló szubrutin a p,p+1 pozicióban lévő számot normalizálja.

Szimplex-táblázat

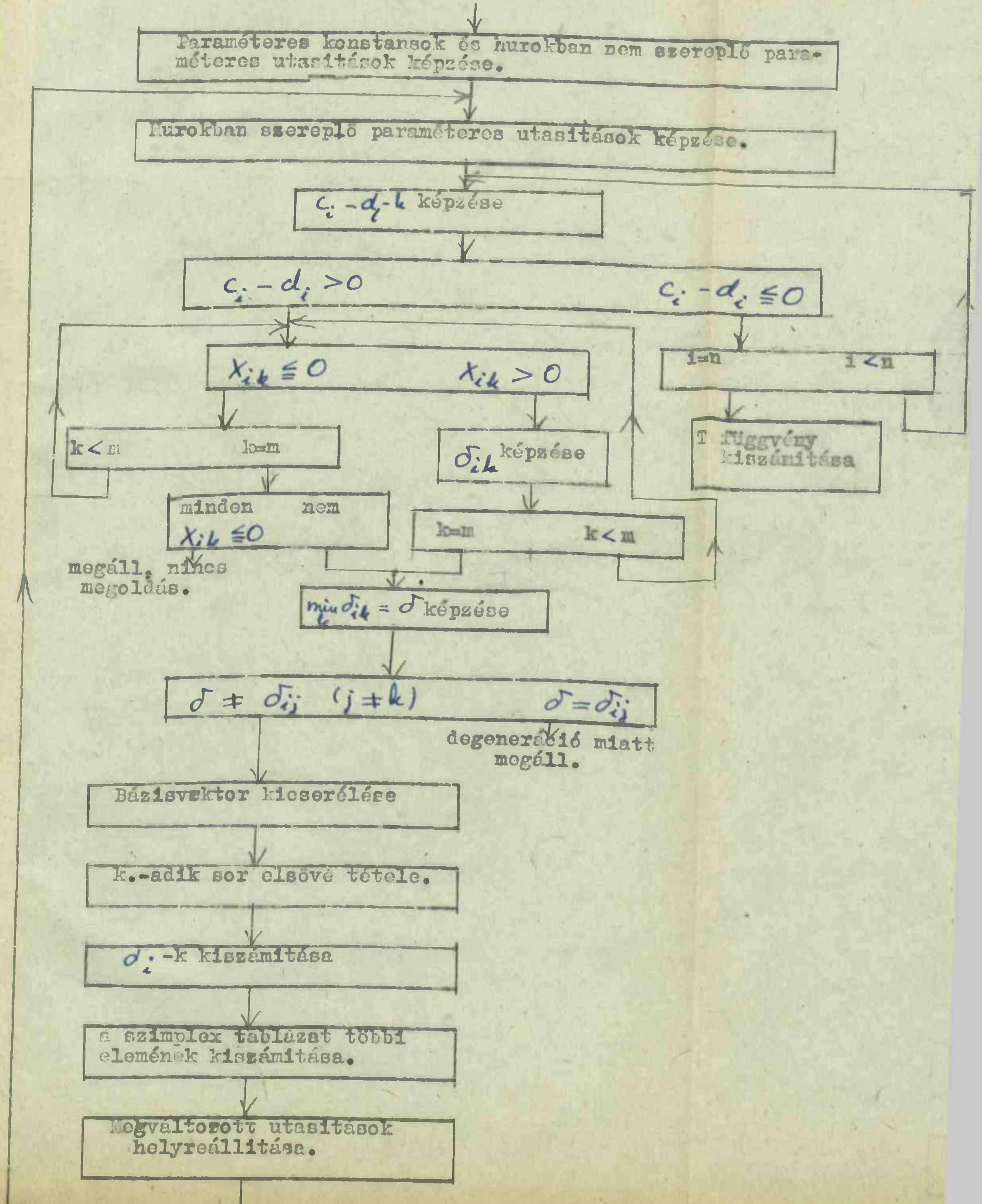
	a bázisvektorhoz tartozó c_i-k jelölés: $\underline{c}^*$	$\underline{a}_0$	$\underline{a}_1$	. . . .	$\underline{a}_n$
	$\langle \tilde{c}_1^* \rangle = A - 2(k-2)$	$\langle \tilde{a}_{10} \rangle = A$	$\langle \tilde{a}_{11} \rangle = A + 2k$		$\langle \tilde{a}_{1n} \rangle = A + 2nk$
	$\langle \hat{c}_1^* \rangle = A - 2(k-2) + 1$	$\langle \hat{a}_{10} \rangle = A + 1$	$\langle \hat{a}_{11} \rangle = A + 2k + 1$		$\langle \hat{a}_{1n} \rangle = A + 2nk + 1$
	$\langle \tilde{c}_2^* \rangle = A - 2(k-2) + 2$	$\langle \tilde{a}_{20} \rangle = A + 2$	$\langle \tilde{a}_{21} \rangle = A + 2k + 2$		$\langle \hat{a}_{2n} \rangle = A + 2nk + 2$
	$\langle \hat{c}_2^* \rangle = A - 2(k-2) + 3$	$\langle \hat{a}_{20} \rangle = A + 3$	$\langle \hat{a}_{21} \rangle = A + 2k + 3$		$\langle \hat{a}_{2n} \rangle = A + 2nk + 3$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	. . . .	$\vdots$
	$\langle \tilde{c}_m^* \rangle = A - 2$	$\langle \tilde{a}_{m0} \rangle = A + 2(k-3)$	$\langle \tilde{a}_{m1} \rangle = A + 2k + 2(k-3)$		$\langle \tilde{a}_{mn} \rangle = A + 2nk + 2(k-3)$
	$\langle \tilde{c}_m^* \rangle = A - 1$	$\langle \hat{a}_{m0} \rangle = A + 2(k-3) + 1$	$\langle \hat{a}_{m1} \rangle = A + 2k + 2(k-3) + 1$		$\langle \hat{a}_{mn} \rangle = A + 2nk + 2(k-3) + 1$
$\langle \tilde{\underline{c}} \rangle$			$\langle \tilde{c}_1 \rangle = A + 2k + 2(k-2)$		$\langle \tilde{c}_n \rangle = A + 2nk + 2(k-2)$
$\langle \hat{\underline{c}} \rangle$			$\langle \hat{c}_1 \rangle = A + 2k + 2(k-2) + 1$		$\langle \hat{c}_n \rangle = A + 2nk + 2(k-2) + 1$
$\langle \widetilde{\underline{c} - \underline{d}} \rangle$		$\langle \tilde{T} \rangle = A + 2(k-1)$	$\langle \widetilde{c_1 - d_1} \rangle = A + 2k + 2(k-1)$		$\langle \widetilde{c_n - d_n} \rangle = A + 2nk + 2(k-1)$
$\langle \widehat{\underline{c} - \underline{d}} \rangle$		$\langle \hat{T} \rangle = A + 2(k-1) + 1$	$\langle \widehat{c_1 - d_1} \rangle = A + 2k + 2(k-1) + 1$		$\langle \widehat{c_n - d_n} \rangle = A + 2nk + 2(k-1) + 1$

$A = \langle \tilde{a}_{10} \rangle = 0750 \qquad k = m + 2$

Az adatokat lebegőpontos alakban visszük be a memóriába olyképpen, hogy az adatok mantisszáját mindig a páros számú pozícióba, a kitevőjét pedig a páratlan számúba tesszük.

Jelölések: $\tilde{x}$ = az x szám mantisszája
$\hat{x}$ = az x szám kitevője.

MENETREND.


Paraméteres konstansok és hurokban nem szereplő paraméteres utasitások képzése.
Hurokban szereplő paraméteres utasitások képzése.
$c_i - d_i$-k képzése
$c_i - d_i > 0$
$c_i - d_i \leqq 0$
$x_{ik} \leqq 0$
$x_{ik} > 0$
i=n
i<n
T függvény kiszámitása
k<m
k=m
δ_{ik} képzése
minden nem $x_{ik} \leqq 0$
k=m
k<m
megáll, nincs megoldás.
$\min_k \delta_{ik} = \delta$ képzése
$\delta \neq \delta_{ij}$ $(j \neq k)$
$\delta = \delta_{ij}$
degeneráció miatt megáll.
Bázisvektor kicserélése
k.-adik sor elsővé tétele.
δ_i-k kiszámitása
a szimplex táblázat többi elemének kiszámitása.
Megváltozott utasitások helyreállitása.