NEUMANN JÁNOS ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA

NEUMANN JÁNOS ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA

/ A különböző tudományterületeken elért eredményeinek összefoglaló áttekintése/

MTESZ Neumann János Számitógéptudományi Társaság

BUDAPEST

1979.

E L Ő S Z Ó

Nemrégen lett volna 75 éves Neumann János korunk egyik legsokoldalubb matematikusa, aki a számitógépek fejlesztése terén elért eredményei révén vált a legismertebbé világszerte. Munkássága azonban kiterjedt a legkülönbözőbb tudományterületekre, megoldásai, eredményei alapvetők, gondolatai megtermékenyitőleg hatottak és hatnak azóta is.

Jelen összefoglaló munkával szeretnénk emléket állitani Neumannak, akinek nevét éppen 10 éve vette fel Társaságunk. Tettük ez utóbbit két okból, egyrészt azért, mert személye elválaszthatatlanul összekapcsolódott a számitástechnikával, másrészt azért, mert Neumann Magyarországon született és tudományos tevékenységét itt kezdte. Az I. világháboru után kialakult politikai atmoszféra azonban sajnos őt is emigrációba kényszeritette. Hazájával, családjával való kapcsolata a II. világháboru kitöréséig folyamatosan meg is maradt.

A közreadott munka összeállitásánál nagy sulyt fektettünk arra, hogy Neumann tevékenysége - egy rövid áttekintés formájában - a lehető legtöbb oldalról kerüljön bemutatásra. Lényegében megismerhetjük a numerikus analizis, a matematikai közgazdaságtan és operációkutatás, az automataelmélet, majd a számitógépek területén elért eredményeit, kifejtett munkásságát. Képet kapunk még a fizika, elsősorban a quantummechanika, de az algebra számelmélet, geometria, topológia és az alkalmazott matematika terén végzett munkájáról is. A fejezetrészek sulyozása alkalmazkodik a szerzők érdeklődési, kutatási területéhez.

NEUMANN JÁNOS

Ádám András /Budapest/

Életutja

Munkássága uj távlatokat nyitott a matematika legkülönbözőbb ágaiban. Egy volt azon ritka lángelmék közül, akiket átfogó érdeklődésük, nagy horderejü gondolatokat gazdagon termő fantáziájuk, roppant munkabirásuk e tudomány egyetemes vezető alakjává emel. Akárcsak Gausst jó egy évszázaddal, vagy Hilbertet egy emberöltővel korábban, a huszadik század közepén Neumann Jánost becsülte "princeps mathematicorum"-ként a szakma közvéleménye. Mivel a tudomány gyarapodása egyre inkább utját állja, hogy egy - habár a legkiválóbb képességü - ember az övéhez fogható teljességet érjen el, az utókor talán utolsónak fogja őt látni a gaussi sokoldaluságu és jelentőségü óriások sorában.

Budapesten született 1903. december 28-án Neumann Miksa bankár és Kann Margit házasságából[1], három fivér legidősebbje volt. A magánuton végzett elemi iskola után 1914-ben került a fasori evangélikus gimnáziumba. Kiütköző matematikai adottságai láttán tanára: Rátz

[1] Teljes neve: margittai Neumann János Lajos /l. [D/2], [D/3], [D/5]. A családnak adományozott nemesi előnévre utalva nevét mind németül, mind angolul következetesen "von Neumann" alakban használta.

László nemcsak maga irányitotta, hanem hozzásegitette Fejér Lipót, Kürschák József és Fekete Mihály pártfogásához is. A fiatal matematikus képességei gyorsan kibontakoztak: első tudományos dolgozata 1922-ben jelent meg, s az 1923-26. években további négy publikáció követte.[2]

Az érettségi után döntés elé került, milyen egyetemi szakot válasszon. Noha hajlamai egyértelmüen a matematikához vonzották, vagyonos szülei a jobb jövedelemmel kecsegtető vegyészi pálya mellett kardoskodtak. Kedvező lehetőségei folytán mindkét tudományban képezhette magát; Budapesten, Berlinben és Zürichben folytatott egyetemi tanulmányok után mind a vegyészmérnöki képesitést /Zürich, 1925./, mind a matematikai doktorátust /Budapest, 1926./ megszerezte.

A következő években német városok: Göttingen, Berlin és Hamburg egyetemein müködött, már 23 éves korában egyetemi magántanári cimet nyerve. Érdeklődését e korai években főként a matematika alapjai és a kvantummechanika kérdései keltették fel; tudományos kapcsolatai /a már emlitetteken kivül/ főként Wigner Jenővel, Hermann Weyllel és Pólya Györggyel alakultak ki. Egyik dolgozatának két szerzőtársa között David Hilbert nevét is megtaláljuk.

[2] Az öt közül az első közlemény Feketével közös.

1930-ban jutott el, ekkor vendégelőadóként, életének és tevékenységének későbbi szinhelyére: Princetonba. Ehhez a kisebb amerikai városhoz a világ egy helysége sem volt fogható az ott élő kiváló matematikusok és fizikusok tudományos sulya tekintetében, és - amint Wigner Jenő emlékezik - Neumann "ugy élvezte Princeton társadalmi és tudományos atmoszféráját, ahogy a kacsa élvezi a vizet". 1931-ben állandó jelleggel Princetonba költözött, mint az ottani egyetem, 1933-tól pedig az Institute of Advanced Study professzora.

A második világháborut megelőző princetoni években a folytonos csoportok, folytonos geometriák elmélete és a funkcionálanalizis kérdései álltak munkássága középpontjában. Szerzőtársai között ott szerepelnek G. Birkhoff, Kuratowski, Stone, Veblen és mások. Megemlitjük magánéletének fordulatait is ebben az időszakban. 1930-ban Kövesi Mariettával kötött házasságot, 1935-ben megszületett egyetlen gyermeke, Marina. Első házassága 1937-ben felbomlott, s a következő évben Budapestre látogatva itt ujra nősült. Második felesége, Dán Klára élete végéig társa maradt.

A második világháboru időszaka és a még hátralévő tiz év alatt Neumann müködésének sulypontja lényegesen eltolódott. Eddigi munkásságának javarésze az un. tiszta matematika és a matematikai fizika területére esett; az utolsó nagy alkotó periódusban pedig vezető szerepet játszott a matematika legkülönfélébb területeken való alkalmazását fellenditő kutatásokban. Foglalkoztatta közgazdasági problémák matematikai tárgyalása és vizsgált a biológia által sugallt kérdéseket; egyaránt közreműködött az első elektronikus számológépek megalkotásában és a háborus időben előtérbe kerülő ballisztikai és nukleáris-fizikai kutatásokban. A meteorológiára, asztrofizikára, hidro- és aerodinamikára is kiterjedt érdeklődési köre. Az atomkutatásokban való több mint egy évtizedes részvétele betetőzéseként 1954-ben vagy 1955. elején[3] Eisenhower elnök az Egyesült Államok Atomenergia Bizottsága tagjává nevezte ki.

1955. augusztusában egészsége váratlan hanyatlásnak indult. A fájdalmak oka ráknak bizonyult, s a műtét és a leggondosabb kezelés sem tudta meggátolni a "leirhatatlan fájdalmak és kinok" között /felesége szavai/ gerincére is átterjedő betegség elhatalmasodását. Utolsó munkáját, a töredékesen elkészült [B/17] könyvet tolószékbe kényszerülve, ereje végső megfeszitésével irta 1955/56. fordulóján. A halál tiz hónapos kórházi ápolás után érte el 1957. február 8-án Washingtonban.

[3] A kinevezés évét illetően a forrásmunkák eltérnek egymástól. A hivatali esküt 1955. márciusban tette le.

Egyénisége

Neumann matematikusi egyéniségét jellemezve mindazok, akik ismerték őt, mindenekelőtt rendkivül gyors és éleselméjü gondolkodását emelik ki. Adottságai már gyermekkorában bámulatos módon nyilvánultak meg: hat éves korában fejben osztott 8 jegyü számokat, nyolc évesen elsajátitotta a differenciál- és integrálszámitást, és tizenkét éves korában eredményesen tanulmányozott komoly matematikai könyvet. Értelmének sima és gyors müködése tökéletesen gördülő óramü képzetét keltette fel munkatársaiban. Negyedóra alatt képes volt megoldani olyan problémát, amellyel más hetekig hiába viaskodott. Nagyszerü memóriájára vall, hogy egyszeri átolvasással meg tudta jegyezni a telefonkönyv egy hasábjának összes adatait. Itélet-alkotásait az Atomenergia Bizottságban való müködése nyomán igy jellemezték: "Ha egyszer ő vetett elemzés alá valamely problémát, a további tárgyalás feleslegessé vált. Világos volt, mit kellett tenni."

Egyaránt kimagaslott az absztrakt következtetésekben és a numerikus számitásokban. Nem riasztotta, ha tevékenysége számolgatással járó részletmunkák végrehajtását kivánta, sőt: büszke volt rá, milyen kitartóan és gondosan végzi a kalkulációkat. Megtörtént, hogy géppel versenyezve oldott meg egyszerü feladatot: lehangolta, amikor egyik munkatársa egy izben látszólag nála gyorsabban jutott el a kalkuláció eredményéhez /a kolléga előre elvégezte a számitást/. Preciz volt a nyomdai levonatok korrigálásában is.

Munkabirását gyakorlatilag határtalannak mondja felesége. A nappalt a munkahelyén dolgozta végig, publikációit éjjel és hajnalban irta.

A kutató matematikusok gondolkodásmódjában két poláris tipus létezik. Az egyik pólushoz közel álló tudósok intuitiv meglátásokban, merészen előretörő /de kezdetben olykor homályosan körvonalazott/ ötletekben bővelkednek; azt mondhatnók, hogy megérzésük sugallta irányban mélyen utat törnek az ismeretlen vadonba. A másik véglet környezetébe tartozók főképpen logikusan-világosan következtetnek, áttekintő elemzéssel végzik munkájukat; képletesen kifejezve, széles arcvonalon eléggé egyenletesen nyomulnak előre. Neumann János - amint az őt jól ismerő Halmos Pál [D/5] jellemzi - az utóbbi tipushoz tartozott. Munkásságát az axiomatikus módszer zseniális és következetes alkalmazása hatja át: a vizsgált téma alapvető sajátságait néhány frappáns kikötésben süriti össze, és erre az alapra a következtetések kiterjedt épületét emeli.

Kollégáihoz szivélyes kapcsolatok fűzték, munkái jelentős részét társszerzőkkel irta. Modora közvetlen volt /olykor nyers is tudott lenni/, az önteltség és nagyképűség hiányzott belőle. Őszintén csodálta a más beállitottságu nagy matematikusokat. Társaságban élénk volt és elmés válaszokra kész; kedvelte a humort, főleg a szójátékokat. Természetesen megnyilatkozó egyénisége távol állt a hagyományos német professzori magatartás etikettszerüségétől. A szeszesitalt nem utasitotta el baráti körben, de csak mértékletesen fogyasztotta. Szivesen játszott pókert és bridzset, nem volt kiemelkedően jó játékos.

A magyar nyelven kivül - amelyet otthonában egész életében használt - természetesen és gyorsan beszélte a nyugateurópai világnyelveket. Angolul nyelvtanilag helyesen, de kiejtésében és mondatszerkesztésében némiképp idegenszerüen beszélt; szóhasználata találó volt, az első amerikai években olykor önkényes szóképzésekkel tüzdelt. Mexikóban járva abban lelte kedvét, hogy az angol szótövek és a spanyol grammatika összeelegyitésével kidolgozta az un. ujkasztiliai nyelvet.

Előadásai tartásához alig használt irásbeli jegyzetet. Gyorsan és szabatosan beszélt, lebilincselő előadásmódjában könnyünek, természetesnek tünt az előadott téma. Azt mondta el, amilyen kép őbenne élt az ismertetett tárgyról; nem egyszerüsitett azért, hogy igy a hallgatóság felfogóképességéhez alkalmazkodjon. Utólag visszaidézve már nem látszott annyira magától értetődőnek egy-egy előadása, mint hallgatás közben; mig a részletek alapos kifejtése őelőtte nem mosta össze az egész téma lényeges összefüggéseiről alkotott képet, ilyen foku áttekintő-képesség általában nem élt a kollégákban.

Dolgozatait tartalmasan és világosan fogalmazta, de stilusa nem mondható elegánsnak. A részletek kidolgozása során nem törekedett arra, hogy a bonyodalmakat, amennyire csak lehet, kiiktassa; hajlott a tulzott formalizálásra is. A közleményeket "ön-tartalmazó" felépitésben szerette fogalmazni: inkább felsorolta az ismert előzményeket, mintsem csupán forrásmunkákra utalta volna az olvasót.

Szakmája mellett beható ismereteket szerzett több más területen. Tájékozott volt az irodalomban; kiválóan ismerte a történelmet. Különösképpen lebilincselte érdeklődését a régi Bizánc története, és ezzel a korral szakemberekkel vetekedő tüzetességgel foglalkozott; behatóan tanulmányozta Jeanne d'Arc perét és az amerikai polgárháboru eseményeit is.

A leiró természettudományok kivül estek érdeklődési körén, az emlékezések arról sem szólnak, hogy a képzőművészetekhez vagy a zenéhez vonzódott volna.

Szivesen, de csak mérsékelt ügyességgel vezetett autót. Princeton egyik utcakereszteződését, ahol többször is történt koccanás a kocsijával, Neumann-sarokként emlegette a közbeszéd.

A háztartási teendők iránt nem volt érzéke, kalapáccsal vagy csavarhuzóval sohasem tevékenykedett otthon. Amikor felesége egyszer vizért küldte 17 éve használt lakásuk konyhájába, bizonytalankodott, hogy hol találja a poharakat. A cipzárak javitása volt az egyetlen hasznos házi elfoglaltság, amit kedvvel üzött.

A közepesnél kissé alacsonyabb termetü, zömök alaku ember volt, sötét hajjal és intelligens sötét szemekkel. Választékosan öltözködött. Kerekded arca /utolsó éveitől eltekintve/ fiatalabbnak mutatta tényleges koránál.

Tudományos munkásságáról

1. A matematika alapjai /halmazelmélet és matematikai logika/.

Neumann Jánosnak a matematika alapjai körébe vágó munkái a rendszámforgalom értelmezésével, a halmazelmélet axiomatikus megalapozásával, a transzfinit rekurzióval és ellentmondástalansági kérdésekkel foglalkoznak. Ilyen irányu kutatásainak jelentőségét az axiomatikus vizsgálatok tárgykörébe való bepillantással éreztetjük.

A kivülállók többsége bizonyára a számokkal foglalkozó tudományként határozná meg a matematikát. Sokkal helyesebb azonban azt mondani, hogy a matematika a halmazok tudománya, minthogy alapvető fogalomalkotása a halmaz /vagy összesség/. A /természetes/ számok fogalma csak később adódik, éspedig a véges halmazok közötti mennyiségi összehasonlitás során jelentkezik absztrakció utján /a számok bármelyike mint egyforma sok elemet tartalmazó halmazok közös tulajdonsága vezethető be/.

A matematika mind véges, mind végtelen összességeket vizsgál. A 18. század elejétől /Newton és Leibniz korától/ kezdve a folytonos-végtelen jellegü kutatások a differenciál- és integrálszámitás /s az ebből kibontakozó matematikai analizis/ révén a matematika legterebélyesebb fejezetévé váltak.[4] E tudományág

[4] Az /elvben/ egyszerübb és természetesebb véges jellegü problémák pedig - némiképp meglepő módon - mintegy 200 évre háttérbe szorultak.

fogalmai és módszerei azonban hosszu időn át nélkülözték a tiszta, logikus megalapozást, és csak a 19. században került rá sor, hogy az analizis fejlett, ám némiképp misztikus-homályos épülete alá egzakt alapok kerüljenek. Ez a törekvés szükségessé tette /a végesekkel együtt/ a végtelen halmazok tulajdonságainak preciz és beható vizsgálatát, és igy - mintegy száz évvel ezelőtt - a halmazelmélet megalkotására vezetett. A halmazelmélet és a vele együtt kialakuló matematikai logika a modern matematika csaknem minden ágának alapjául szolgál.

A véges számfogalom emlitett származtatásához hasonló módon a végtelen halmazok között is lehet mennyiségi /"kisebb", "egyenlő", "nagyobb"/ különbséget tenni. Persze a végesben helyes megállapitások nem mindig vihetőek át a végtelen összességekre.[5]

[5] Ha például egy véges halmazhoz akár egy elemet hozzáveszünk, akár megkétszerezzük a halmazt, akár a legalább két elemü halmazt négyzetre emeljük /vagyis az elemekből alkotható összes párok halmazát képezzük/, akár a halmaz összes részhalmazainak halmazát tekintjük, - ugy e négy módszer mindegyike az eredetinél határozottan nagyobb számosságu halmazhoz vezet /éspedig n elemü halmazból kiindulva rendre $n+1$, $2n$, n^2, 2^n elemühöz/. Végtelen halmaznak azonban az első három módszer egyike sem növeli az elemszámát /vagyis csak ugyanakkora számosságu halmazt ad, amekkora az eredeti volt/, csupán a negyedik vezet határozottan nagyobb számosságu halmazra. E negyedik eljárás lehetséges volta azt is igazolja, hogy a végtelen számosságok "felfelé" korlátlanul képezhetőek.

Hamar kiderült, hogy a "nagyon bő" végtelen halmazok gátlástalan definiálása logikai ellentmondásokhoz vezethetnek.[6] Hogy a matematika egészének megbizhatósága meg ne rendüljön, a halmazelméletet axiomatikus-formális alapokra kellett helyezni: néhány alapfogalmat és az azok kezelését lerögzitő néhány szabályt ugy megadni, hogy ezek "eléggé tágak" legyenek ahhoz, hogy belőlük lehetőleg kifejthessük mindazt, ami a halmazelméletben értékes és érdekes, de "eléggé szükek" is abban az értelemben, hogy az ellentmondások kivül rekedjenek a felépithető elmélet körén.

A halmazelmélet három klasszikus axiómarendszerének egyike /időrendben a középső/ Neumann János korai /doktori értekezésének is anyagául szolgáló/ alkotása /l. [A/I.4],[A/I.16], [B/1]. E rendszer a

[6] A leghiresebb ezek közül B. Russell antinómiája: az a halmaz, amelyet az önmagukat elemként nem tartalmazó halmazok összességeként értelmezünk, eleme-e önmagának? Akár igenlő, akár tagadó válasszal próbálkozunk, mindenképp ellentmondáshoz jutunk.

"függvény" és "argumentum" alapfogalmakra rő ki véges sok axiómát, és az ellentmondások kiküszöbölése végett az "eleme" relációt korlátozza. Lényeges előnye a Zermelo és Fraenkel által kidolgozott korábbi rendszerhez képest az axiómák véges száma, Zermel és Fraenkel rendszerében ugyanis végtelen sok axióma képzésére utasitást adó axióma-szkémák is szerepeltek. A harmadik nevezetes axiomatizálási módot Bernays és Gödel a két korábbi axiomatika tanulságait figyelembe véve alakitották ki.

A három axiómarendszer között különbséget tehetünk ugyan elegancia és célszerüség tekintetében, sok fontos vonatkozásban azonban egyenértéküek egymással. Igy egyforma "teljesitőképességgel" alapozzák meg a halmazelméletet, és az ismert módon egyikükből sem vezethetőek le ellentmondások. Nincs egzaktul megcáfolva az, hogy valamilyen más uton mégis antinómiák adódhatnának belőlük /csupán intuitive tünik lehetetlennek ilyenek felbukkanása/, az azonban szabatosan bebizonyitott állitás, hogy vagy mindhárom rendszer ellentmondástalan, vagy egyikük sem az. Másfelől - amint ez minden véges axiómarendszerre igazolt tény - e rendszerek sem kategórikusak: meg lehet fogalmazni a rendszerek bármelyikének eszközeivel olyan T állitást, hogy, amenynyiben a rendszer ellentmondásmentes, ugy akár magát a T állitást, akár T tagadását ujabb axiómaként a rendszerhez hozzávéve ismét egy-egy ellentmondástalan rendszert kapunk. Ma már konkréten azt is tudjuk, hogy a kontinuumsejtés néven ismert nevezetes probléma megfelel ilyen T állitás gyanánt.

2. Kvantummechanika

A kvantummechanika területére eső tevékenységében Neumann az axiomatikus szigoruságu matematikai tárgyalásmódot érvényesitette egy /elméleti/ fizikai területen. [B/2] könyve kiemelkedő jelentőségü mü a tárgykörben. Kvantummechanikai munkássága adott inditékot a Hilbert-terekkel kapcsolatos /a következő szakaszban érintendő/ kutatásaihoz is.

Neumann János fő törekvése az elmélet felépitési módját illetően az volt, hogy a fizikai interpretációt és a logikai következtetéseket élesen elkülönitse egymástól. A tapasztalati észlelések eredményei és a fizikai természetü feltevések csak az axiómák által lehettek jelen az elméletben; az axiómákból - akárcsak az egzakt matematikában - tisztán formális meggondolások révén adódtak a többi megállapitások.

Neumann bekapcsolódása idején a kvantummechanika két fő irányát: a Heisenberg és mások által kifejlesztett mátrix-mechanikát valamint a Schrödinger-féle hullámmechanikát Dirac és Jordan általánositotta egységes diszciplinává, az un. transzformációelméletté. Sulyos tehertétele volt ennek az általánositásnak, hogy alapvető szerepet juttatott a Dirac-féle deltafüggvénynek, e függvények értelmezése pedig nélkülözte a kellő matematikai szabatosságot. Neumann /magával Hilberttel és Nordheimmel közösen irt dolgozatában/ mellőzte e fogalmat, és a Hilbert-tér operátorait felhasználó egzakt elmélettel helyettesitette a transzformációelmélet elegánsnak látszó, ám szigoru elvi nézőpontból tekintve ingatag meggondolásait.[7]

Neumann másik igen jelentős idevágó vizsgálata a kvantummechanikai észlelések kauzális voltával kapcsolatos. Ismeretes volt, hogy a kvantummechanikai mérési eredmények bizonytalanok, valószinüségi jellegüek. Ennek olyan hátterét gyanitották a fizikusok, hogy léteznek a tapasztalásunk számára nem hozzáférhető "rejtett" paraméterek, és ha ezeket is figyelembe tudnánk venni, akkor az ekképpen finomitott elmélet ujból determinisztikussá válna. Neumann megcáfolta, hogy az elmélet determinisztikus voltát ilyen paraméterek hozzávételével el lehetne érni. Felfogása szerint /amelyet a fizikusok többsége azóta is oszt/ a bizonytalanság oka nem az, hogy az észlelő helyzetét hiányosan ismerjük, hanem hogy az észlelő az észlelt jelenséggel <u>együtt</u> képez egy rendszert.

[7] Később L. Schwartz és Sz.L. Szoboljev megmutatták, hogy nemcsak a transzformációelmélet ezen megkerülése, hanem annak <u>preciz kidolgozása</u> is járható ut.

3. Matematikai analizis

A tárgykörbe, amelyhez érkeztünk, Neumann János munkásságának terjedelem tekintetében - és talán a vizsgált kérdések absztrakt volta szempontjából is - legsulyosabb fejezete esik. Sajnos, a szereplő fogalmak elvont jellege folytán nincs mód arra, hogy ide vonatkozó tevékenységét ténylegesen érzékeltessük, és csupán a legfontosabb témák felsorolására szoritkozhatunk.

A Hilbert-terekre vonatkozó kutatásai révén Neumann egyik megalapozója lett az analizis egy kiterjedt modern irányzatának: a funcionálanalizisnek. A végtelen dimenziós Hilbert-tereket ugyanolyan polgárjoghoz juttatta a matematikusok előtt, amilyennel korábban a véges dimenzióju euklidészi terek rendelkeztek. Behatóan tanulmányozta a Hilbert-terek operátorait és önadjungált /vagy hipermaximális/ transzformációit; vizsgálta az ilyen operátorokból álló gyürüket[8] /reá utaló ujabb elnevezéssel: a Neumann-algebrákat/.

Foglalkozott a metrikus terek elméletével, messzemenően elmélyitette az un. mértékproblémára vonatkozó is-

[8] A modern matematikában az olyan algebrai struktúrákat nevezik gyürüknek, amelyekben két müvelet van értelmezve, és e müveletekre igazak az egész számok körében végzett összeadás és szorzás fő tulajdonságai /egész számokon mind a pozitivakat, mind a negativakat és a 0-t értve/.

mereteinket[9] [A/I.26]. Bebizonyitotta [A/II.12] a statisztikus mechanikában felmerült un. kváziergodikus hipotézist. Jónéhány dolgozatot szentelt a mátrixokkal, lineáris egyenletrendszerekkel és parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos témák vizsgálatának, gyakran a numerikus számitások elvégzésének módszereit elemezve.

4. Algebra, számelmélet, geometria és topológia

Habár Neumann a matematika /és elméleti fizika/ különféle, eléggé önálló területein tevékenykedett, mégis gyakori jelenség munkásságában, hogy érdeklődését az egyik tárgykörben felvetődő problémák egy más területre terelik át. Már láttuk, hogy a kvantumelméleti vizsgálatai váltották ki a funcionálanalizis kérdéseiben való elmélyedését. Ez utóbbi tárgykör inditotta a végtelen dimenziós geometriák megalkotására, algebrai kutatásainak némelyike pedig /hálóelméleti eredményei

[9] E probléma a következőképpen mondható ki: létezik-e az n-dimenziós euklidészi tér minden részhalmazára értelmezett olyan függvény, hogy a függvényértékek nemnegativ valós számok, az egységkockához a függvény az 1 számot rendeli, a függvény érzéketlen a részhalmaz /merev/ elmozditására nézve, és additiv /vagyis közös pont nélküli részhalmazokat egyesitve az egyesitési halmazhoz tartozó érték az összetevők függvényértékeinek összegével egyenlő/. Hausdorff és Banach azt a meglepő eredményt kapták, hogy $n=1$ és $n=2$ esetén van ilyen mértékfüggvény, de a 2-nél nagyobb n számokra nem létezik.

eredményei és a reguláris gyürük vizsgálata/ összefonódik geometriai meggondolásaival.

Fekete Mihállyal együtt irt első munkája [A/I.2] a klasszikus algebra egy kérdéséhez: a komplex együtthatós polinomok zérushelyei elhatárolásának tárgyköréhez járult hozzá. Uj, egyszerü bizonyitást adott Minkowskinak diophantoszi egyenlőtlenségekre vonatkozó egy tételére.[10]

Algebrai vizsgálatainak jórésze a modern algebra kérdéseihez kapcsolódott. Bevezette és vizsgálta a később Neumann-regulárisnak nevezett gyürük osztályát.[11] Fontos hálóelméleti tételeket nyert.[12]

Egy jelentős dolgozatot az algebrai számelméletnek szentelt. Megadta algebrailag független valós számok kontinuumszámosságu halmazát.

Alapvető munkákat irt topologikus vektorterekről. Bekapcsolódott Hilbert 1900-ban összeállitott hires 23 problémája közül a topologikus csoportokra vonatkozó ötödik probléma vizsgálatába.[13] A topologikus csoportok elméletét a Haar-féle mértékekre és a /őáltala bevezetett/ majdnem periodikus függvényekre vonatkozó kutatásaival is gyarapitotta.

[10] Minkowski munkájában egy közel álló nyitott probléma is kapcsolódott a tételhez. Ez a sejtés évtizedeken át állta a matematikusok ostromát, végül Hajós Györgynek sikerült igazolnia Minkowskiétól és Neumannétól különböző, igen bonyolult módszerekkel.

A folytonos geometria fogalmához ugy jutott el Neumann, hogy a projektiv geometriák /hálóelméleti eszközökkel megadott/ ismert axiómarendszerében a dimenzió végességét[14] biztositó axiómát elhagyta, és más kikötésekkel helyettesitette. Ezzel olyan geometriákat nyert, amelyek dimenzió-száma /értelmes módon bevezethető és/ végtelen, s amelyek a Hilbert-terek bizonyos altér-rendszereinek általánositásaként is felfoghatóak.

[11] A gyürük mibenlétére a 8. lábjegyzetben már utaltunk. A gyürük közül azokat, amelyekben osztás értelmezhető /ugy, mint az összes racionális számok gyürüjében/, testeknek nevezzük. Neumann az által a követelmény által értelmezte a reguláris gyürüket, hogy az axa=a egyenlet legyen mindig megoldható /vagyis bármely a-hoz létezzen legalább egy olyan x, hogy érvényes az egyenlőség erre az a, x párra/. A testekben érvényes ennek az egyenletnek a megoldhatósága /sőt: adott a-hoz - a tekintett test egyetlen eleme mint a kivételével - pontosan egy, megoldást jelentő x létezik/, ennélfogva a Neumann-reguláris gyürük a testeknél bővebb /az összes gyürüknél persze szükebb/ gyürüosztályt alkotnak.

[12] Az absztrakt háló-fogalom mintája egy adott /véges vagy végtelen/ halmaz összes részhalmazainak viselkedése az egyesités és metszés müveleteire nézve.

[13] Az V. probléma teljes megoldását Gleason, Montgomery és Zippin érték el 1952-ben, betetőzve számos matematikus erőfeszitéseit.

[14] Amint tudjuk, a közönséges euklidészi geometria /és annak projektiv módositása/ 3 dimenziójú.

5. Kibernetikai matematika

Munkássága utolsó évtizedében Neumannt leginkább a kibernetika kérdései foglalkoztatták. Elektronikus számológépet már az ő bekapcsolódása előtt is épitettek ugyan /az ENIAC-ot/, ez azonban még tizes számrendszerben dolgozott, és működésében nyoma sem volt az önműködő programvezérlésnek /ennélfogva csakhamar elavulttá is vált/. Neumann János / Goldstine-nal közös munkáiban/ kialakitotta a programvezérlésű elektronikus számológépek[15] működésének azóta is általánosan érvényesülő fő elveit. Megállapitásaik szerint a gép tervezésének egy logikai-matematikai és egy /ezután következő/ műszaki-elektronikus szakaszra kell tagolódnia, a gép tevékenységét kettes számrendszerben célszerű megszervezni; kimondották továbbá, hogy a gépnek szerkezetileg milyen fő részekre kell tago-

[15] A programvezérlés azt jelenti, hogy egy számitás elvégzéséhez a gép először megkapja az összes szükséges információt, majd e program betáplálása után külső behatásoktól függetlenül végzi el a számitást, amelyben - bonyolultabb esetekben - az elemi aritmetikai műveletek száma csillagászati nagyságrendű is lehet.

lódnia /vezérlő egység, aritmetikai egység, tároló egység, bemenő egység, kimenő egység/. Ezen elvek alapján készültek el a mai értelemben vett első számológépek: a MANIAC vagy JOHNNIAC és az EDVAC.

A kibernetika alapvető kérdéseivel foglalkozó munkái közül az [A/V.9], [A/V.10] közleményeket és az életrajzi részben már emlitett [B/17] könyvet emeljük ki. Ezen munkák közül [A/V.10]-ben inkább egzakt megállapitásokat, a másik kettőben jórészt programot adó, távlatokat mutató elvi fejtegetéseket találunk. Elemezte a természetes és mesterséges automaták müködési elveit: a soros illetve párhuzamos felépitést; az adatok digitális illetve analóg /vagy e két elvet vegyitő/ megjelenitését.[16] Előszeretettel vetette egybe az idegrendszer és a számológép tevékenységének hasonló és eltérő vonásait. /Pl. kifejtette, hogy egy elektronikus alkatelem térfogat- és energia-igénye mintegy százmillió-egymilliárdszoros egy idegsejttel összehasonlitva, de tizezer-százezerszeresen gyorsabban dolgozik, mint a sejt. Ennélfogva azonos terjedelemmel és azonos idő alatt elvégezhető akciók tekintetében kb. tizezerszeres előny mutatkozik az idegsejtek javára./ Az automaták müködésében elkerülhetetlenek a hibák,

[16] A digitális elv szerint müködő gép számjegyekkel fejezi ki a számokat, az analóg elven alapuló gép folytonos /a tényleges adattal többé-kevésbé arányos/ fizikai mennyiséggel dolgozik. A digitális elv jóval nagyobb pontosságot tesz lehetővé.

hiszen az alkatrészek esetleg helytelenül müködhetnek /de azért is, mert a számokat csak korlátosan sok számjeggyel adhatjuk meg - ezt nem tekintve pl. tiz darab ötjegyü szám sorozatát ötvenjegyü számmal fejezhetnénk csak ki, s.i.t. - , a müveletek elvégzése tehát kerekitési elhanyagolásokkal jár/. Ha egy szerv rosszul müködik, ugy a természetes szervezet lehetőleg változatlanul fenntartja a kifelé mutatott müködést, és a meghibásodott szerv helyreállitására törekszik; a mesterséges automatákat viszont ugy tervezik, hogy a gép bármilyen apró üzemzavara a legfeltünőbb következményekkel járjon /pl. a számitás abbamarad, megszólal a hibajelző csengő/, és ezáltal kihivja a kivülről érkező javitó beavatkozást. Neumann János behatóan vizsgálta az általában megbizhatóan dolgozó alapelemek véletlenszerü /ritka/ téves müködésének kérdéseit. A természet a jeltovábbitó csatornák megsokszorozásával küszöböli ki az ebből eredő hibákat; Neumann alapos mennyiségi elemzéséből kitünik, hogy ez a módszer a jelenlegi müszaki adottságok mellett nem alkalmas rá, hogy nem teljesen megbizható alkatrészekből megfelelő szervezéssel megbizható automatákat épitsünk.

Az automaták önreprodukciójának kérdése ugyancsak magára vonta Neumann érdeklődését. Idevágó fejtegetéseinek fő megállapitása, hogy elvileg lehetséges olyan automatát szerkeszteni, amely /a külvilágból energiát és alkatrészeket véve fel/ képes előállitani önmaga egy másik példányát.

Neumann jónéhány további gondolata is a mai elméleti kibernetika fontos irányzatainak vált forrásává. Körvonalazta a gépi alakfelismerés problémáját. Hangsulyozta az automaták matematikai elmélete kiépitésének szükségességét a bonyolult rendszerek szervezési elveinek tisztázása érdekében.[17]

A régebbi matematikusok általában megoldottnak tekintettek egy problémát, ha olyan algoritmust sikerült találni, amely bármely konkrét esetben véges sok lépésben a megoldáshoz vezetett; Neumann János felfogása szerint nem elég a lépésszám véges voltával megelégedni, hanem, ha gyakorlatilag hatékony algoritmusokra törekszünk, ugy a szükséges lépésszám nagyságrendi becslése és lehető legalacsonyabbra csökkentése is döntő tényezője kell hogy legyen a kutatásoknak.

6. Játékelmélet és matematikai közgazdaságtan

A stratégiai játékok elmélete és az ezzel összefonódó matematikai közgazdaságtan kifejlesztésében Neumann János kimagasló szerepet játszott. Előtte csak elszórt kezdeti eredmények voltak, ismeretesek a versengő felek közötti játékokról; ő már 1928-beli

[17] Fontosnak tartotta, hogy az elmélet ne kizárólag logikai-diszkrét jellegü legyen, hanem tartson kapcsolatot a matematika folytonos fejezeteivel is.

[A/VI.1] dolgozatában megvetette az önálló elmélet alapjait, és Morgensternnel közös [B/11] könyvében később messzemenően ki is épitette azt.

Vázoljuk néhány fontos idevágó gondolatát.

Neumann egyik észrevétele, hogy a két partner közötti játékok elemzésekor nagymértékben el lehet tekinteni attól, hogy a tényleges játék időben egymás után következő lépésekből áll, és mellőzni lehet /azáltal, hogy a várható értékeket tekintjük a játékbeli tényleges eredmények helyett/ a véletlenszerű mozzanatokat is. Ezen egyszerüsitések után a játék azt jelenti, hogy az X játszófélnek is módjában áll bizonyos lehetséges x_1, x_2..., x_m stratégiák[18] között választani, Y-nak is az y_1, y_2,..., y_n stratégiák között, és hogy az egymás ellen szegülő bármely /x_i, y_j/ stratégia-pár esetén /ahol i az 1,2...,m számok egyike és j az 1,2,...,n számok egyike/ adott az az a_{ij} érték, amely megmondja, hogy X előreláthatóan mennyit nyer el Y-tól[19], amennyiben

[18] Stratégián egy olyan szabályt értünk, amely minden helyzetre, ami a játék folyamán előadódhat, előirja a játszófelek soron következő lépését.

[19] Ha a_{ij} negativ, akkor persze Y nyer el az X-től $|a_{ij}|$ összeget.

ezen stratégiákat követik. Feltételezzük, hogy mind-két fél a számára legelőnyösebb módon dönt a straté-giák között. Az a_{ij} értékeket m X n tipusu mátrix-ban elrendezve képzelhetjük, és belátható, hogy igaz a

$$\max_x \min_y \leq \min_y \max_x$$

összefüggés, ahol pl. a baloldal a mátrix egyes so-raiban lévő legkisebb elemek legnagyobbikát jelenti, azaz azt fejezi ki, hogy mennyi az a nyereség, amely-re X stratégiái egyikét alkalmasan megválasztva /és ahhoz az egy stratégiához ragaszkodva/ szert tehet, bármint igyekezzék is Y meghiusitani X törekvését.

A leirt játék legegyszerübb esete az, amikor a maxi-mumok és minimumok közötti összefüggésben egyenlőség érvényes. Ekkor világos, hogy X is, Y is következete-sen kitarthat a számára legjobb egy-egy stratégia mellett, és X várható nyereménye éppen a formula két oldalának közös értéke lesz.

Neumann alapvető jelentőségü megállapitása az un. nye-regpont-tétel vagy minimax-tétel. E tétel szerint a

$$\max_x \min_y < \min_y \max_x$$

esetben is megadható X és Y részére egy-egy "szuper-stratégia", amelyet alkalmazva a nyereség várható ér-téke egy előre meghatározható szám lesz, és ennél jobb eredményt sem X, sem Y nem tud elérni a maga számára, ha az ellenfelek mindketten célratörően játszanak. A szuper-stratégia ugy kapható az egyes stratégiákból, hogy a partnerek bizonyos stratégiákat megfelelő arány szerint hazárd módon "kevernek" egymással;[20] a keverési eljárásnak látszólagos hátránya, hogy a játékos következetlenül cselekszik, valóságos előnye viszont, hogy ellenfele nem tud átlátni rajta, nem tudja előre kikövetkezetetni a döntéseit /hiszen azokat előre ő maga sem ismeri/. Igy - amint Neumann hangsulyozza - a véletlen elem, amelyet a korábbi egyszerüsitéssel kiküszöböltünk a játék vizsgálatából, ujra utat tört magának, mint a játéknak lényeges sajátsága.

A fenti meggondolások arra az esetre vonatkoznak, amikor két ellentétes érdekeltségü fél vesz részt a játékban.[21] Ha az egymástól független játszófelek

[20] Pl. X 1/2 valószinüséggel az x_1 stratégiát, 1/6 valószinüséggel x_2-t és 1/3 valószinüséggel x_3-at játssza meg, azaz minden lépése előtt véletlenszerüen - mondjuk kockadobással - dönt arról, hogy x_1, x_2, x_3 melyike szerint reagáljon az előtte álló helyzetre.

[21] Ideértve természetesen azt az esetet is, amikor "egy játszófél" egynél több, de egymással eleve szövetségben lévő játékost jelent /pl. a bridzsben/.

száma három vagy még nagyobb, akkor az elmélet lényegesen bonyolultabbá válik. Az emelkedik fő kérdéssé, miként érdemes a játékosoknak két koalicióba csoportosulniuk /a koaliciók aztán a kétszemélyes játékok elvei szerint versenyeznek egymással/.

7. Az alkalmazott matematika egyéb területei

A korábban emlitett területeken kivül Neumann az alkalmazott matematika számos más kérdésköréhez is hozzájárult. Ilyen jellegü vizsgálatainak többsége a számológépek felhasználásához vagy az atomkutatásokhoz kapcsolódik. A hidrodinamika problémái közül a lökéshullámok és az örvények elméletét gazdagitotta. Vizsgálta a neutronok szóródásának statisztikáját, továbbá számológépek használatát véletlen számok előállitására és az időjárás előrejelzésére. Foglalkozott egymással gravitációs kölcsönhatásban álló, véletlenszerüen elhelyezkedő testekből álló testek mozgásának leirásával.

Neumann és Magyarország

Neumann János müködésének szinhelye fiatal korától fogva főleg Németország, majd az USA volt. Szülőföldjével való kapcsolata magánjellegü, tudományos szempontból nem számottevő látogatásokra szoritkozott, ezekre is csak 1938-ig. Habár tudományos tisztségeinek felsorolása hosszu listát tesz ki[22],

[22] L. [C/1], és [D/1], 41-42. oldal.

a Magyar Tudományos Akadémia tagjai közé soha sem tartozott; 1935-ben szerepelt ugyan a napirenden levelező taggá választása, de nem szavazták meg.

Ha jelentékeny személyes hatást nem gyakorolt is a magyar matematikai életre, publikált munkáihoz matematikusaink tevékenysége sokrétüen kapcsolódik. Külön emlitésre méltó ebben a vonatkozásban az általa kibontakoztatott kutatási irányokat továbbfejlesztő magyar funkcionálanalizisbeli iskola müködése.

Emlékének hazai megbecsülését szolgálja, hogy az ő nevét viseli az 1968-ban alakult Neumann János Számitógéptudományi Társaság.

Tudománypolitikai és közéleti szereplése

Tudományos sulyánál és az atomkutatásokban való közremüködésénél fogva Neumann-nak a közügyekben való állásfoglalásai tulléptték a magánemberként való véleményalkotás kereteit; nézeteit több irásában is vezető állami testületek vagy széles nyilvánosság elé tárta.

Elsőként a matematika értékét és hasznosságát illető főbb gondolatait foglaljuk össze. A matematika végső soron <u>tapasztalati tényeken nyugszik,</u> még ha ezt kissé elfedi is az a tény, hogy állitásait szigoru logika kapcsolja össze. Szokás azt mondani, hogy a matematikai tételek az "abszolut, objektiv igazságot" fejezik ki. Ez igy aligha helytálló, hiszen a matematikai szigoruság követelményeit a matematikusok sem értelmezik változhatatlan és egységes módon /maga Neumann is két izben gyökeresen felülvizsgálta idevágó nézeteit/, ám a matematika szilárdsága eléri /talán valamivel még felül is mulja/ bármely más tudomány elméleti konstrukcióinak megbizhatóságát. A matematikai eredmények közül sok megtalálja az utat /a fizikán és a technikai tudományokon keresztül/, hogy hasznossá váljon a társadalom számára; előfordul, hogy olyan elméletek is alkalmazáshoz jutnak, amelyeket "a hasznosságra való tekintet nélkül fejlesztettek ki, gyakran annak sejtelme nélkül, hogy később hasznossá válhatnak egészen más jellegü okok következtében" [A/VI.35]. Másfelől korunk matematikája /tárgyban, jellegben stb./ igen szétágazó, és fokozott szerepet juttat az elegancia /lényegileg esztétikai/ kritériumának. Fennáll ezzel kapcsolatban az a veszély, hogy a matematika a kisebb ellenállások irányában fejlődve "elbarokkosodik", az öncélu részlet-kutatások sokaságává válik; kivonatosnak látszik vissza-visszatérni a tapasztalat forrásaihoz.

A természettudományokról általában szólva kifejti, hogy a tudomány nem magyaráz, alig interpretál, hanem modelleket állit fel, osztályozza és kapcsolatba hozza a jelenségeket. E modellek matematikai konstrukciók; horderejüknek az egyszerüségük /eleganciájuk/ és a jelenségekkel való széleskörü /heterogén területeken, különféle nagyságrendekben való/ összeillő voltuk a kritériuma. A jelenségeket kauzálisan /okokból következtetve, apró részletekre tagolva/ és teleológikusan /célra törekvést látva, a történések összességét egységbe fogva/ leiró elméletek filozófiailag ellentétesek ugyan; megtörténhet azonban - amint azt a klasszikus mechanika példázza - hogy egy ilyen elmélet-pár matematikailag ekvivalens egymással; egyikről a másikra áttérni nem mélyebb változtatás, mint ha négy helyett kétszer kettőt mondunk.

Összeveti az elméleti fizika és a matematika jellegét. Az elméleti fizika kivülről /a kisérleti fizikából/ kapja céljait, és érdeklődése kis számu fő-kérdésre összpontosul, - a matematika eléggé öntörvényüen fejlődik, és rengeteg önálló fejezetre bomlik. Egy fizikus ismerheti az elméleti fizika felét, de korunkban nincs olyan matematikus, akinek e tudomány több mint negyedéhez köze volna[23] [A/I.1].

[23] E megállapitást az teszi hitelessé, hogy ha mindenki másra érvényes is - magára Neumannra nem.

Neumann élete során az emberiség egészének létkörülményeire ható visszafordithatatlan változások következtek-fejeződtek be. Az atomenergia felhasználhatóságával és katonai alkalmazhatóságával megszünt a tudománynak az államhatalmaktól való viszonylagos függetlensége, és minden kirobbanó háboru az emberiség katasztrófájának kockázatával fenyeget. A közlekedés és hirközlés fejlődése folytán a Föld véges mérete döntő tényező lett /a világ "kifogyott a helyből"/, a katonai akciók hatósugara megnőtt, az események hatása bolygónk egészén szétterjed. Neumann véleménye szerint el kell fogadnunk e megmásithatatlan tényeket /akár örülünk azoknak, akár nem/, és illuziók nélkül kell keresnünk a fennmaradás utját az uj körülmények között. Nem tiltakozott a tudományba való állami beavatkozás ellen, de hangsulyozta, hogy a tulzások: a "hasznos" és "káros" technika szétválasztása, és az alapkutatás tárgyválasztási szabadságának, nyilvános publikálási lehetőségének korlátozása aligha lennének lehetségesek és nem is volnának célravezetőek [A/VI.37].

Az emberek természetes adottságának látta, hogy mindenki a saját érdekeinek érvényesitésére törekszik; ha kell, álnok módon is. A történelmet egymással viaskodó erők nyers küzdelmeként fogta fel. Ennek a szemléletnek és az USA[24] iránti elkötelezettségének kö-

[24] Az Egyesült Államokat önként választott hazájának érezte, nem tekintette magát talajtalanná vált emigránsnak.

vetkeztében a negyvenes évek végén a nagyhatalmi politikát pártolta, igy a hidrogénbomba kifejlesztése mellett foglalt állást[25]. Később egyik utolsó munkájában [A/VI.38] foglalkozott azzal az ellentmondással, amely a harcnak /amint vélte/ az emberi természetből szükségszerüen fakadó volta és a modern technikával vivott háboru lehetetlensége között feszül; a feloldást abban remélte, hogy "türelem, rugalmasság, intelligencia" érvényesül a világ ügyeinek intézésében, mert "az egyetlen lehetséges biztonság viszonylagos, és a napi döntések intelligens végrehajtásában rejlik". Szükségesnek látta, hogy "uj politikai formák és eljárások fejlődjenek ki", és a "napról-napra, vagy talán évről-évre szóló megalkuvó intézkedéseket, az apró korrekt döntések hosszu láncolatát" tanácsolta az emberiség menedékéül.

25 Ismeretes, hogy a vezető atomfizikusok közül Oppenheimer helytelenitette a roppant pusztitó erejü további nukleáris fegyverek kifejlesztését, és emiatt az a vád érte, hogy tudatosan az USA érdekei ellen tör. A vizsgálat során Neumann sikraszált Oppenheimernek az Egyesült Államok iránti lojalitása és jóhiszemüsége mellett, ha állásfoglalásaik szembenálltak is egymással [D/5].

HOHENZOLLERNSTRASSE
No. 23/24

BERLIN W 10. DEN 6.27.1931.
TEL: LÜTZOW 3110, 3130, 3137, KURFÜRST 2308

Kedves Rudolf!

Kudar Párisi „egészségügyi" fiaskójáról csak leveledből értesültem, és ennek vétele után megállapítottam, hogy ittcsak Schrödinger tudott a dologról. Schrödinger a következőket közölte velem: Ő a refus vétele után igyekezett a Párisból eltávolításának megmásítására rávenni, és kétszer levelet váltott velük, de eredménytelenül. (Korrespondenciáját szívesen rendelkezésedre bocsájtja.) Ezután N. Bohr is foglalkozott a dologgal, de úgylátszik ugyancsak sikertelenül. Kudar a fiaskó után azonnal visszatért Koppenhágába, ahol Bohr ezen semester tartamára egy kisrendű stipendiumot biztosított neki. Hogy a semester vége után mi lesz vele (tehát augusztusban), azt Schrödinger nem tudja. Én részemről azt hiszem, hogy mivel mindeddig nem tűnt fel Berlinben vagy Pesten, feltehető, hogy a sorsát Bohrra bízta.

Wigner ittvolt tegnapig, most elutazott cca. 10 napra (azt hiszem, hogy Pestre is), azután ismét itt lesz régi címén: Hohenzollerndamm 36.

Más ujság itt nincs. Július legvégén Pesten leszek, cca. 2 hétre, remélem, hogy akkor lesz még alkalmam Téged viszontlátni, és a téli Amerika-utam előtt személyesen elbúcsúzni.

Addig is sokszor üdvözöl
mindenkor kész híved
Jancsi.

Neumann levele prof. Ortvay Rudolfhoz.
/ 1931. junius 27./

UNITED STATES LINES

90
1936/VI/5

On Board S.S. "Manhattan"
1936 Junius 5.
Southampton és Cobh
közt.

Kedves Rudolf,

nagyon köszönöm két levelét, melyeket még Párisban megkaptam. Én is azt hiszem, hogy a Dirac-Born-féle tipusok — vagy legalább is valamelyikük — funkcionálni fognak. Tehetek még valami egyebet ebben a dologban?

Én is nagyon sajnálom, hogy ezen a nyáron nem találkozunk. Miután Édesanyámmal Párisban ugyis találkoztam, és minthogy a nyár második felében U.S.A.-ban mindenesetre dolgom van, ugy láttam, hogy jobb ha mindjárt visszamegyek. Az öz-

Neumann levele prof. Ortvay Rudolfhoz.
/ 1936. junius 5./

szes szakértők nézete szerint Princeton nyáron oly rettenetesen unalmas, hogy az embert egyenesest kísértésbe hozza, hogy dolgozzon — és nekem jelenleg egy csomó restanciám van — és pedig az unalmas fajtából: t.i. meg kell írnom több "elvileg" kész dolgozatot.

Páris tudományosan, igaz hogy inkább mathematikailag, igen érdekes volt.

De az egész tartózkodás meglehetősen el volt rontva azáltal, hogy a gyerek nem nagyon bírta a hotel-életet, és Mariette kétszer is "grippe"-t kapott. —

Remélem, hogy nemsokára ismét hírt kapok Feléd, a címem (még ha nem maradok Princetonban, ami lehetséges) Fine Hall, Princeton, N.J., U.S.A. —

A Budapesti hírek érdekeltek, hogy ítéled meg Riesz Frigyes chanceait a Suták-féle succesióra: és ki lehetne kedvező esetben Riesz szegedi utóda? Kár volna ha Szeged, amely eddig egy lényeges mathematikai centrum volt, még tovább gyöngülne. —

Franciaország elég konfuzus állapotban látszik, nem hiszem, hogy a Blum-régime sok áldást fog hozni. Reméletőleg egy rövid intermezzo lesz. Viszont a "balközép" szintén elég impotens társaság. Poincaré és Clémenceau itt úgylátszik

nagyon hiányzik. —
A viszontlátásig
szívből üdvözöl
Jancsi.

NEUMANN SZEREPE A SZÁMITÁSTECHNIKÁBAN

Goldstine, Herman H. /Princeton, USA/

A modern elektronikus számitógép az Egyesült Államokban keletkezett a második világháboru idején. Bár jónéhány - talán egy tucatnyi - embernek is lényeges szerepe volt a számitógép létrehozásában, a legfontosabbat kétségtelenül Neumann Jánosnak kell tulajdonitanunk. A következőkben megkisérlem kiemelni azokat a mozzanatokat, amelyek személyéhez füződnek és bemutatni, hogy miért éppen ő volt ennek a történetnek a főszereplője. Nem szeretném, ha eközben bárkinek az az érzése támadna, mintha bármely más személyt háttérbe akarnék szoritani vagy lekicsinyelni. Mindössze arról van szó, hogy szilárd meggyőződésem szerint Neumannak a számitógép kifejlesztésében vállalt része minőségileg lényegibb, mélyebb és nagyobb hatásu volt bárki másénál. Minden résztvevő persze igazi uttörő volt és rászolgált a dicséretre és elismerésre. De Neumann egyedülálló volt mind között. Nemcsak egyszerüen alapvető jelentőségü eredményeket ért el - talán mindnyájunknak voltak eredményeink - hanem ezeket összefüggő egésszé tudta integrálni; valószinüleg egyedül ő volt képes arra, hogy a tudományos társadalmat meggyőzze az uj eszköz fontosságáról; de meg is mutatta e társadalomnak, hogy hogyan kell használni és miért korszakalkotó a munkájuk szempontjából. Miközben ezekkel foglalkozott, forradalmasitotta az alkalmazott matematikát. Őszintén az a véleményem, hogy akkoriban erre senki más nem lett volna képes. Számitógéprendszere és a tudósok gondolkodásában kiváltott forradalmi változás egyaránt kiemelkedő eredményei voltak.

A következő oldalakon, nagyon röviden és leegyszerüsitve megpróbálom bemutatni a modern számitógép hőskorát. Ez a történet, ahogy majd elmondom, személyes elfogultságomról fog árulkodni, erénye viszont, hogy első kézből való és dokumentálva van. Célszerü talán egy kis kitérőt tennem ezen a ponton és elmagyaráznom, hogy az USA-ban jelentős versengés folyik a számitógép-technika néhány korai müvelője között az elsőség dicsőségéért. Igy aztán valószinü hogy néhányan vitatni fogják a Neumann eredményeit ismertető beszámolómat. Amit tehát mondani fogok, egyesek nem fogadják el szentirásként, de ez a polémia alábbhagy majd az idő mulásával és lehetővé teszi, hogy pártatlan történészek pártatlan végkövetkeztetésre jussanak.

Ahhoz, hogy Neumannak a számitógépek területén betöltött szerepét feltárhassuk, szóljunk először néhány szót a matematikai logika iránti korai érdeklődéséről. Ezen a témán keményen munkálkodott és Hilbert hatása alatt több érdekes dolgozatot készitett. 1925-ben már készülőben volt az "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre" c. munkája. Ennek megirását, mint talán tudják, az a tudományos vita ösztönözte, amely a század elején lángolt fel Russel, Weyl és Brouwer között. Ők egyenként bebizonyitották, hogy a halmazelmélet filozófiai alátámasztása nem teljesen helytálló.[1] Hogy az elméletet egészségesebb alapokra helyezze, Brouwer megalkotta intuicionista matematikai rendszerét, amely olyan, hogy nehézségek és ellentmondások nem merülnek fel benne.

Ahhoz azonban, hogy ezt megtehesse, a modern matematika jelentős részét - talán felét is - el kellett vetnie. Kevés matematikus volt hajlandó elfogadni - vagy legalább a gyakorlatban használni - a matematikának ezt az uj rendszerét, és legtöbbjük megmaradt a "Business as usual" alapon, remélve, hogy majd valaki más kiegyenesiti a dolgokat.

Hilbert volt az első, aki arra vállalkozott, hogy az intuicionista módszerekkel megpróbálja szemléltetni: az ugynevezett klasszikus matematika mentes az ellentmondásoktól.[2] Hilbertnek ez a nagy terve számottevő érdeklődést váltott ki a matematikusok között általában, és konkrétan Neumannból is. A tárgyhoz való talán legfontosabb hozzájárulása a "Zur Hilbertschen Beweistheorie" /A hilberti bizonyitáselmélethez/ c. dolgozata

---

1 Russell-Whitehead, Principia Mathematica, Cambridge, 1910-13; Brouwer, "Intuitionistische Mengenlehre," -Jahresbericht der deutschen Math.-Ver., Vol. XXVIII, 1920, pp. 203-208; és Weyl, "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik," Math. Zeit., Vol. X, 1921, pp. 39-79.

2 Hilbert, "Neubegründung der Mathematik I," Abh. des Math., Seminars Hamburg, Vol I, 1923, pp. 157-175 és "Die logischen Grundlagen der Mathematik," Math. Ann., Vol LXXXVIII, pp. 151-165.

volt, amely 1927-ben jelent meg.[3] Ebben a klasszikus analizisnek egy alrendszerét definiálta, amelyről szabatosan kimutatta - véges módszerek segitségével - hogy ellentmondásmentes. Ebből helytelenül arra következtetett, hogy módszerével az egész analizis konzisztenciája bizonyitható.

Ezzel kapcsolatban egyszer elmondta nekem, hogy két egymást követő éjszakán megálmodta a bizonyitást és föl is kelt, hogy leirja azt, de mindkét alkalommal rájött, hogy a bizonyitás hézagos. Folytatva elmondta, hogy a matematika nagy szerencséjére a harmadik éjszakán nem álmodta meg a bizonyitás befejezését, mivel Gödel 1931-ben kimutatta, hogy - Neumann szavaival - : "Az egész lényegében a következőt jelenti: Ha egy matematikai rendszer nem is torkollik ellentmondásba, ezt a tényt ugyanennek a rendszernek az eljárásaival nem lehet bizonyitani... Személyes véleményem, amelyet sokan mások osztanak, az, hogy Gödel megmutatta: Hilbert programja lényegében reménytelen."[4]

Hilbert egyik legfontosabb problémája a matematikai logikában az ugynevezett "Entscheidungsproblem" /döntési probléma/. Hilbert feltette a kérdést, hogy lehet-e el-

3 Von Neumann, Math. Zeit., Vol. XXVI. 1927, pp. 1-46.

4 A Gödel-féle bizonyitás megjelent: "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I," Monat, Math. Phys., Vol. XXXVIII, 1931, pp. 173-198.

járást találni annak az eldöntésére, hogy valamely adott "jelentéssel biró" és a szimbolikus logika szokásos jelölésmódjaival kifejezett állitás bizonyitható-e. 1936-ban Church is, Turing is megmutatta, hogy ez nem lehetséges.[5] /Zárójelben meg kell jegyezni, hogy ez az eredmény eltér Gödel tételétől. Gödel azt mutatta meg, hogy a Principia formalizmusában vannak állitások, amelyek olyanok, hogy sem az állitás, sem az ellenkezője nem bizonyitható./

Ennek a háttérnek a keretében kell megvizsgálnunk Neumann érdeklődését a számitógépek és a gépi számitások iránt, előbb azonban egy rövid kitérőt teszünk az angol Alan Turing-hoz, aki doktori disszertációját a Princeton-i Egyetemen készitette el, ahol Neumannal is megismerkedett. Az utóbbi olyan nagyra tartotta Turingot, hogy meghivta tanársegédjének az 1938-39-es akadémiai évre. Turing azonban ugy döntött, hogy fontosabb számára, hogy visszatérjen Angliába és a Külügyminisztériumban vállaljon el egy állást, és ilymódon küzdhessen a szabad világot fenyegető nácik ellen.

Mindenesetre Turing kidolgozta az általa "kiszámitható"-nak nevezett számok koncepcióját. Ezek olyan "valós szá-

---

5 Church, "A Note on the Entscheidungsproblem", Jour. Sym. Logic, Vol. 1, 1936, pp. 40-41, 101-102. Turing, "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem," Proc. London Math. Soc., Ser. 2, Vol. XLII, pp. 230-265, and "Correction," Vol. XLIII, 1937, pp. 544-546.

mok, amelyek decimális kifejezései véges módszerekkel kiszámithatók". Ezeknek a számoknak, nagy általánosságban a kiszámitható függvényeknek a vizsgálatára kifejlesztette egy olyan automatának vagy "számitásokat végző gépnek" a fogalmát, amely képes arra, hogy minden kiszámitható számot véges számu lépésben kiszámitson. Nem a priori nyilvánvaló, hogy bármely automata képes kiszámitani minden kiszámitható számot. Valóban, Turingnak talán a legnagyobb eredménye ezen a területen, hogy be tudta bizonyitani: létezik olyan univerzális automata, amely minden kiszámitható számot ki tud számitani.

Turing gépe persze matematikai és nem fizikai konstrukció. "Fekete doboz", amelynek csak a tulajdonságairól kell beszélni. A gépnek véges számu állapota van, amelye mondjuk 1-től n-ig beszámozhatók. Igy bármely pillanatban a gép valamely i állapotban van, ahol $1 \leqq i \leqq n$, és a következő pillanatban pedig átvált egy másik, j állapotba. Hogy leirhassuk, hogyan történik ez, képzeljünk el egy papirszalagot, amely hossza mentén négyzetekre van beosztva. Minden négyzetbe beirható egy adat. A gép négyzetenként "olvasni" tudja a szalagot, és az adott négyzetben talált információ szerint fog müködni. Olvasáson kivül még "felirni" és "törölni" tudja egy négyzeten az adatot, amely mindig vagy 0 vagy 1. A gép egyszerre mindig egy négyzet alapján végez valamit; ezenkivül véges számu négyzettel előre vagy hátra tudja léptetni a szalagot.

Hogy pontositsuk, miről is van szó, tegyük fel, hogy a gép i állapotban van, és hogy a szalagon lévő e /=0,1/ számot olvassa. Az uj j /1$\leq$ j $\leq$ n/ állapot specifikációja, a p szám, amely megadja, hogy hány négyzettel kell a szalagot előre vagy hátra léptetni, és a p négyzetnyi léptetés után elért négyzetbe felirandó f szám, mint az i és e mennyiségek függvényei "teljes mértékben definiálják egy ilyen automata müködését".[6]

Valóban figyelemreméltó, hogy létezhet olyasmi, mint a korábban emlitett univerzális automata. Turing megjegyezte azonban, amint az előbb láttuk, hogy bármely kigondolható automata teljes leirása véges módszerrel, azaz véges számu szóban kifejezhető. Ez a leirás "tartalmaz bizonyos üres szakaszokat - azokat, amelyek az előbb emlitett j, p, f illetve i, e mennyiségek függvénykapcsolatát adják meg, tehát amelyek az automata konkrét müködését specifikálják. Ha ezeket az üres szakaszokat kitöltjük, akkor már egy meghatározott, konkrét automatával van dolgunk. Amig viszont üresek, a séma az általános automata általános definiciójának felel meg.[7] Neumann továbbviszi a gondolatot: "ez az automata, amelyet arra konstruáltak, hogy el tudjon olvasni egy leirást és a leirt cél érdekében müködésbe jöjjön, nem más, mint a Turing értelmezése szerinti univerzális au-

6 Von Neumann, <u>Collected Works</u>, Vol. V. New York, 1963, pp. 288-328.

7 Idézett müve, p. 314.

tomata. Ahhoz, hogy ezzel leutánozhassunk bármely müveletet, amelyet bármely más automata végre tud hajtani, elegendő, hogy ellássuk a kérdéses automata leirásával, valamint azokkal az utasitásokkal, amelyet annak a készüléknek kellett volna kapnia a tárgyalt müvelet elvégzéséhez."

- . - . - . - . -

Hagyjuk most el egy időre ezt a gondolatkört és térjünk vissza Neumannhoz. Ebben az időben a szobája ugyanabban az egyetemi épületben volt, ahol Turing-é, és igy közelről figyelhette az automaták elméletében folyó munkát. Ennélfogva teljesen otthonos volt ezen a területen az 1940-es években, amikor egyre több munkát vállalt el az Egyesült Államok részére a nácikkal vivott háboruban. 1943-ban Oppenheimer meghivta tanácsadónak a Los Alamos-i csoporthoz. Éppen ekkoriban kezdett kialakulni az elméleti és kisérleti fizikusoknak az egyik legfigyelemreméltóbb gyülekezete, amelyet a világ valaha is látott. Ulam elmesélt egy kedves sztorit, amely jól érzékelteti egy ilyen csoport karakterét.

Amikor /Neumann/ megkérkezett, a Koordinációs Tanács éppen ülésezett. Igazgatónk, Oppenheimer tartotta a beszámolót... Amikor befejezte, megkérdezte, hogy van-e valakinek kérdése vagy megjegyzése. A hallgatóságra jó benyomást tett a beszámoló és senki nem tett fel kérdést. Akkor Oppenheimer aziránt érdeklődött, hogy más tárgykörben van-e kérdés. Egy-két másodperces csönd után egy mély hang szólalt meg /a tulajdonos kiléte a történelem homályába merült/: "Mikor lesz már végre cipész a Dombon?" Bár pont akkor semmilyen tudományos kérdésben nem fordultak Johnny-hoz tanácsért, mégis - saját állítása szerint - abban a pillanatban teljesen megbarátkozott Los Alamos légkörével.[8]

Hamarosan Neumann központi figurává vált különféle tevékenységekben, amelyek komplex, a gömbszerü lökéshullámokkal kapcsolatos problémák megoldására irányultak. Ezeket a problémákat nem-lineáris parciális differenciál-egyenletekkel fogalmazták meg, amelyeknek a megoldásait a klasszikus matematika szokásos analitikus módszereivel nem lehetett kifejezni. Nagyon gyorsan szakértő lett a numerikus számításokban és állandóan kereste a módját, hogy hogyan lehet ilyen számításokat hatékonyan elvégezni.

- . - . - . - . -

1943. kora tavaszán a Pennsylvania Egyetemen voltam helyileg, ahol a US Army Hadianyagügyi Osztálya Ballisztikai Kutatólaboratóriumának egyik alállomását vezettem. Ebben a minőségben megkeresett engem J.G. Brainerd professzor, aki az Egyetem részéről felelős volt minden

---

8 Ulam, "John von Neumann 1903-1957", Bull. Am. Math. Soc., Vol. LXIV. 1958, pp. 1-49.

olyan ügyért, amely az alállomásommal összefüggött. Elmondta, hogy a tanszemélyzet egyik tagja, John W. Mauchly tapogatózó javaslatot tett egy teljesen elektronikus, digitális számitó-berendezés tervezésére és megszerkesztésére. Brainerd érdemesnek találta az elgondolást és azon a véleményen volt, hogy az Egyetem Moore Elektromérnöki Intézete hajlandó lenne vállalkozni a fejlesztésre. Olyan időszak volt ez, amikor az elektronikai technika a nagy háboru erőteljes ösztönző hatása alatt - különösen a radartechnikában és a tüzirányitásban elért látványos haladással kapcsolatban - kezdett kialakulni. Néhány vállalkozókedvü mérnök és fizikus, mint pl. John Atanasoff az akkori Iowa Állami Főiskolán, már próbálkozott a digitális számitások elektronikus technika révén történő felgyorsitásával. Atanasoff röviddel azelőtt vitatta meg elképzeléseit Mauchly-val, hogy a Moore Intézet megtette javaslatát.

Mindenesetre Brainerd javaslatát ugyszólván azonnal elfogadtuk és az ugynevezett ENIAC project /ENIAC: Electronic Numerical Integrator and Calculator/ 1943. julius 1. előtt létrejött: Ifj. J. Presper Eckert, egy ragyogó tehetségü mérnöktovábbképzős hallgató volt a főmérnök, Mauchly az elsőszámu segitője, Brainerd a project felügyelője, én pedig az USA kormányát képviselő felelős tiszt.

Az ENIAC fejlesztése Eckert mérnöki képességeinek és fáradhatatlan vezetői müködésének diadala volt, de ugyancsak emléket állitott Brainerd nyugodt, de biztos adminisztrativ tevékenységének, valamint Mauchly ötletének. Mindhármunk szerencséjére a müszaki személyzet olyan kitünő mérnökökből állt, mint Arthur W. Burks, Joseph Chedaker, Chuan Chu, John H. Davis, Adele K.Goldstine, Harry Huskey, T. Kite Sharpless, Robert Shaw és még néhányan, akiknek nevét már elfelejtettem. A csoport kollektiv erőfeszitése, a lényegében éjjel-nappal folyó munka eredményeképpen a gép elkészült és 1946. február 15-én átadták rendeltetésének.

Ez a gép még nem volt a modern értelemben vett tárolt programu számitógép, de nem volt hiján bizonyos programozási lehetőségeknek. Lássuk, hogyan irta le a müködést Brainerd, Mauchly és Eckert az 1942. augusztusában számomra készitett javaslatuk függelékében:

"Mint már emlitettük, az elektronikus számitógép a számlálás elvét használja ki eredményeinek elérése érdekében. Ezért tehát nem más, mint elektromos analogonja minden értelemben azoknak a mechanikus összeadó-, szorzó- és osztógépeknek, amelyeket közönséges artimetikai célokra manapság gyártanak. Az elektronikus számitógép felépitése azonban lehetővé teszi a több egyszerü szerkezeti komponens közötti összeköttetést és ezáltal müködési ciklusok kialakitását biztositja, ami a méretei szabta korlátok között mindenféle differencia-egyenlet lépésenkénti megoldását eredményezi. Egy müvelet - például egy egyszerü szorzás - eredménye további müveletekben rögtön felhasználható bármilyen, a problémát "uraló" egyenletek előirta módon, és ezek a számok szükség szerint átvihetők egyik komponensből a másikba anélkül, hogy közben kézzel papirra kellene másolnunk őket, vagy manuálisan átvinni egyik komponensből a másikba, mint ahogy az szükséges lenne, ha közönséges számológépekkel végeznénk el a lépésről-lépésre történő megoldást.

Ha a mechanikai analógiát valaki maga elé kivánná képzelni, akkor nagyszámu - mondjuk husz vagy harminc - számológépre kellene gondolnia, amelyek egyenként legalább tizjegyü számok kezelésére alkalmasak és egymás közt össze vannak kötve mechanikai szerkezetekkel. Ezek gondoskodnak arról, hogy az egyik gépben elvégzett valamilyen müvelet numerikus eredménye helyesen átkerülhessen valamelyik másik gépbe; amelyiket egy alkalmasan kialakitott programszerkezet kijelöl. Továbbá azt is hozzá kell képzelni, hogy ez a programszerkezet alkalmas az előbbihez hasonló különféle müveletekből és átvitelekből álló ciklusok kialakitására, egy ciklusban mondjuk tizenöt vagy husz müvelettel. Elmondható, hogy még ha lehetne is konstruálni egy ilyen mechanikus készüléket, és még ha annak müködési sebessége elfogadható is lenne, kétségkivül igen kicsi lenne azoknak a problémáknak a száma, amelyeket az alkatrészei kopása által meghatározott élettartama alatt képes lenne megoldani. Amikor azt állitjuk, hogy az elektronikus számitógép olyan komponensekből áll, amelyek a közönséges mechanikai számológép pontos analógiáját mutatják, az a szándékunk, hogy ezt az analógiát teljességében értelmezzük.

Konkréten, ahogy a közönséges számológép kihasználja a tizes számrendszer sajátságait a számitások végrehajtása közben, ugyanugy használhatja ki azokat az elektronikus készülék is. Ha egy számot, mondjuk az 1216-ot be kell tölteni valamelyik regiszterbe, akkor nem szükséges ehhez 1216-ig elszámlálni. Helyette elegendő összesen tizet "számlálni", egyet az ezres regiszterben, kettőt a százasban, ismét egyet a tizes regiszterben, végül hatot az egyesben. Csak ily módon lehetséges, hogy szinte korlátlan számitási pontosságot érhetünk el a müveleti idő tulzott megnövekedése nélkül. Felmerült olyan elektronikus készülékek gondolata is, amelyekre ez nem áll, de ugy tünik, itt ezek nem érdemelnek különösebb figyelmet."

Csak 1944. közepén történt meg, hogy Neumannt bevezettem az ENIAC project-be. Akkor már tanácsadóként müködött a Ballisztikai Kutató Laboratóriumnál, de még nem volt tudomása az ENIAC fejlesztéséről. A gép, amint megismerkedett vele, nagy örömforrássá vált számára, és tovább ösztönözte érdeklődését ezen a területen. Ez a gép pontosan az volt, még az akkori befejezetlen formájában is, amire neki szüksége volt számitásaihoz, amelyeket azt megelőzően oly fáradságosan végzett Los Alamosban.

Most végre megvolt a reális lehetősége a problémák numerikus megoldásának. A fizika számos fontos területén évek óta pontosan tudták, hogy hogyan kell szabatos matematikai formában leirni a tanulmányozott jelenségeket, azonban teljesen tisztázatlan volt, hogy hogy lehet az adódó matematikai képleteket megoldani. Valójában már a legkorábbi időktől kezdve ez az igény sok elegáns és haladó eredménynek képezte az alapját, igy például a trigonometria Hipparkhosz és Ptolemaiosz által történt felfedezésének, /i. e. 150 ill. i.sz. 150/, a logaritmusok Napier és Briggs által történt felfedezésének /1620-as évek/,valamint Schickard, Pascal és Leibniz korai digitális számológépeinek.

Az olyanfajta jelenségek, amelyeket Neumann akart tanulmányozni, általában a hiperbolikus tipusu nem-lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszerekkel voltak leirhatók, amelyek a matematikai analizis ismert módszerei szerint általában megoldhatatlanok. Ezért nem is meglepő, hogy csak nagyon kevés fizikus vagy mérnök próbálkozott ilyen rendszerek megoldásával. Ha egyáltalán vállalkoztak is ilyesmire, azt rendszerint az analóg számitások egy különleges válfajának, a fizikai kisérletnek a formájában tették. Például, a levegő egy szárny mentén való áramlásának tanulmányozására a tervezők szélcsatornát használtak és használnak ma is. Ez nem más, mint analóg számitási forma egy nem-lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldására, amelynek felirása egyébként nem ütközik különösebb nehézségbe.

Az eredmény az, hogy jóformán egy fizikus vagy mérnök sem kisérelte meg, hogy bizonyos tipusu fizikai problémákat matematikai egyenletekhez és numerikus eljárásokhoz fordulva oldjon meg. Valójában ha valaki mégis megpróbálna ilyen egyenleteket digitális eszközökkel megoldani, valószinüleg komoly numerikus instabilitásokkal találná szembe magát, miáltal a számok szükségszerü kerekitése révén esetlegesen bevitt kis hiba minden határon tul nőne. Nem is sikerült ennek a problémának a gyökeréhez férkőzni mindaddig, amig Courant, Friedrichs és Lewy le nem küzdötték a nehézségeket az 1927-ben iródott munkájukban.[9] Ők fedezték fel azt, amit ma széles körben a Courant feltételként ismernek; ez egy olyan feltétel, amely bizonyos korlátokat szab meg arra vonatkozóan, hogy különféle differencia-egyenletek lépésenkénti megoldásához hogyan lehet numerikus rácsot kijelölni. Szerencsére Neumann alaposan ismerte ezt az eredményt és talán mindenki másnál tisztábban látta annak döntő jelentőségét a végrehajtandó lökéshullámszámitások szempontjából.

Ezért aztán nem is csoda, hogy Neumann volt kortársai közül talán az egyetlen, aki mohó érdeklődéssel vállalkozott nagyszabásu numerikus számitásokra. Ebből a szempontból Gausshoz hasonlit, aki közismerten önmagáért szerette a számolást és a maga idejében kiterjedtnek minősülő számitásokat végzett.[10]

---

9 "Über die partiellen Differenzengleichungen der Physik," <u>Math. An.</u>, Vol. C, 1928-29, pp. 32-74.

10 Gauss egy egész elméletet fejlesztett ki és nagyszabásu számitásokat végzett az ujonnan felfedezett Ceres kisbolygó fellelésére, amelyet szem elől vesztettek az Európára kiterjedő, hosszantartó rossz időjárás alatt.

Neumannt igen erősen érdekelték az egyenletei elektronikus digitális eszközökkel való megoldásának lehetőségei, amelyek uj utakat nyitottak meg számára a kapcsolódó területeken.

- . - . - . - . -

Abban az időben, amikor az ENIAC fejlesztése már befejeződött, de a gépet még nem készitették el, átmenetileg pangás állt be a szellemi tevékenységben. Hogy elfoglaljuk magunkat, gyakran találkoztunk Neumannal és arról beszélgettünk, hogyan lehetne jobb számitógépet épiteni - az ENIAC két fő hibája a hatalmas méretek /mintegy 20 000 elektroncső/ és a kis memória /20 tizjegyü vagy 40 ötjegyü szám/ voltak. Először a beszélgetések arról folytak, hogy ezt a két hibát hogy lehet kiküszöbölni, és több szellemes és ugyanakkor gyakorlati szerkezeti elem került szóba erre a célra. Köztük voltak az ugynevezett higany késleltető vonalak vagy akusztikus tankok, TV-tipusu csövek és mágneses hordozók, mint például szalagok. Hamarosan azonban a viták átterjedtek szervezési és architekturális problémákra és itt Neumann brillirozott. Ez volt az ő különleges "mestersége". Itt mindnyájunk felett álló tudással és mély ismeretekkel rendelkezett.

Máig is vitatott, hogy pontosan ki fedezte fel a tárolt program koncepcióját ezeknek a beszélgetéseknek a során, amelyekben elsősorban Burks, Eckert, Adele Goldstine és jómagam, Mauchly és Neumann vett részt. Számomra egyértelmü, hogy e csoportban Neumann volt az, aki a legjobban értette a koncepciót és annak jelentőségét, aki először érvelt elfogadása érdekében és aki papiron megszerkesztette a gép teljes sémáját; be is programozta azt egy rendezés-összeválogatás elvégzésére. /Meg vagyok győződve, hogy gondolkodásában kulcsszerepet játszott az, hogy ismerte Turing elképzeléseit./ Ahogy Neumann mondta:

> "Vannak bizonyos dolgok, amelyek egyértelmüen egy emberhez füződnek... az akusztikus tank erre a problémára való alkalmazásának ötletét Pres Eckerttől hallottuk. Vannak más ötletek, ahol a szituáció zavarosabb. Olyannyira zavaros, hogy az, akitől származik az ötlet, maga megtagadta azt és kétszer-háromszor is megváltoztatta véleményét, vagy legalább is nem propagálta a gondolatot. Ezekben az esetekben gyakorlatilag lehetetlen kimondani, hogy ki volt az apostol."[11]

A tárolt program koncepcióját illetően legalább is a keletkezés dátuma meglehetős pontossággal megállapitható. 1944. augusztus 21-én ezt irtam:

> "Neumann nagy érdeklődést mutat az ENIAC iránt és hetente értekezik velem a gép felhasználásáról.

---

11 Részlet a Moore Elektromérnöki Intézetben 1947. április 8-án,szabadalmi ügyekről tartott konferencia jegyzőkönyvéből.

Ő a robbanás aerodinamikai problémáin dolgozik... Ahogy az ENIAC további pályáját én látom, két további irány van, amelyekben tovább kell vinnünk kutatásainkat... Ugy érzem, az ENIAC-nak azokat a kapcsolóit és kezelőszerveit, amelyek most kézi müködtetésre vannak kialakitva, könnyüszerrel lehetne mechanikus relék és elektromágneses telefonkapcsolók segitségével mozgatni, amelyeket táviró-szalag vezérel... Ezen a módon szalagokat lehetne leszabni és ujra felhasználni, valahányszor szükséges. Igy nem kellene értékes perceket tölteni kapcsolók állitgatásával, amikor egy probléma egyik fázisáról áttérünk a következőre."

/A levélben emlitett kapcsolók és kezelőszervek voltak azok az eszközök, amelyekkel az ENIAC-ot egy bizonyos problémára programozni lehetett./
1942. szeptember 2-án ugyanannak az embernek ezt irtam:

"Hogy szemléltessem azokat a tökéletesitéseket, amelyeket el akarok érni, hadd mondjam el, hogy a Neumann-féle igen összetett parciális differenciálegyenlet megoldásához... az uj Harvard IBM-nek kb. 80 órára van szüksége, szemben az ENIAC 1/2 órájával, amiből 28 perc esik a kártyák vágására, és 2 perc a számolásra. A kártyák vágására egyszerüen azért van szükség, mert a perciális differenciálegyenletek megoldása nagytömegü adat átmeneti tárolását igényli. Remélem, meg tudunk épiteni egy olcsó, gyorsmüködésü készüléket erre a célra....

A másik fő tökéletesitést... megint csak a Harvard géppel lehet érzékeltetni. Egy hatványsor hét tagjának kiszámitása 15 percig tartott a Harvard készüléken, ebből 3 perc volt a futás előkészitése, mig az ENIAC előkészitése legalább 15 percig tartana, maga a számitás pedig kb. 1 másodpercig. Ennek az aránytalanságnak a kiküszöbölésére egy központi programozó készüléket javasolunk, ugyanolyan tárolóeszközökből felépitve, mint amelyekről a fentiekben szó volt. Ez a program-rutint kódolt formában tárolná. A központi programozás másik döntő előnye, hogy tetszőleges rutin - bármilyen komplex is legyen - végrehajtható, mig a jelenlegi ENIAC-nál korlátozottak a lehetőségek."[12]

Ezek szerint a tárolt program koncepciója valamikor az 1944. augusztus 21. és szeptember 2. közti két hét folyamán fogant. Ezt az időt tehát bizonyos értelemben a modern számitógép korai története legfontosabb szakaszának kell tekinteni. Ezt követően hamarosan az U.S. Army Hadianyagügyi Osztálya szerződéses megbizást adott az Egyetemnek egy uj számitógép kifejlesztésének megkezdésére. Ez a gép EDVAC néven ismert, és tervezésére egy 1944. szeptember 13-án kelt levélben találunk utalást, amelyet Brainerd P.N. Gillon ezredeshez, felettesemhez irt, aki akkor is később is szilárdan állt mindenfajta számitógépfejlesztés mellett. Brainerd formális javaslata többek közt ezt tartalmazta:

---

12 1944. szeptember 2. Goldstine levele Gillon-hoz.

> "Nincs reális lehetőség az ENIAC tárkapacitásának... olyan mértékü bővitésére, amely nem-lineáris parciális differenciálegyenletek kezelésére szükséges... A probléma teljesen uj megközelitést igényel. Jelenleg két elvről tudunk, amelyek alapként felhasználhatók. Az egyik a ikonoszkóp csövek felhasználásának lehetősége, amelyet illetően Dr. Neumann beszélt Dr. Zworykin-nal az RCA Kutató Laboratóriumaiból; a másik pedig a késleltetővonalak tárolásra való felhasználása, amivel már van némi tapasztalatunk..."

E szerződésben előirtak végrehajtása közben Neumann egy elegáns dolgozatot vagy inkább jelentést irt, amelynek cime: "First draft of a Report on the EDVAC" volt, 1945. junius 30-án kelt és az Egyetem körözte. Ez a dolgozat a gép javasolt szervezését, a részegységek megépitéséhez szükséges logikai áramköröket és a számitógép szótárát azaz kódját tartalmazta. Ebben a dolgozatban használta fel először Neumann az idegi analógiát, és az áramköröket ugy rajzolta meg, mintha ideghálózatok lennének. Eközben Pitts és Mc Culloch elgondolásaiból meritett.

Ekkorra azonban a háboru már vége felé járt, és az ENIAC-EDVAC csoport különféle tagjait centrifugális erők repitették szét a békeidőnek megfelelő tevékenységekhez. Jómagam és Neumann elhatároztuk, hogy az Institute for Advanced Study keretében létrehozunk egy projectet egy párhuzamos müködésü, bináris számitógép megépitésére, amely a memóriájához a televiziócsöveken alapuló ötleteket használ fel. A project mintegy komplemense volt a Pennsylvania Egyetem-i projectnek, amelynek tárgya egy soros, bináris, memóriának késleltető vonalat használó számitógép volt. A számok párhuzamos kezelése a sorosnál jóval gyorsabb géphez vezetett, és a párhuzamos gép gyorsan tért hóditott.

A soros módszer legfőbb a priori előnyének az eszközökben jelentkező lényeges megtakaritást tekintették, hiszen egyszerre csak egy számjegyet kellett feldolgozni. Valójában azonban az elektroncsövek felhasználása nem az u.n. aritmetikai szervben összpontosult, hanem főleg más részekben, például a vezérlésben, ahol viszont a soros szisztéma éppen hogy megnövelte a berendezés terjedelmét, mégpedig olymértékben, hogy a párhuzamos rendszer végül is olcsóbb volt. Később kiderült, hogy egy n jegyü számokat kezelő párhuzamos gép legalább n-szer gyorsabb, mint az összehasonlitó soros gép, ugyanakkor az előbbi nem tartalmaz több csövet az utóbbinál.

Talán helyénvaló itt megemliteni, hogy ekkoriban - 1945 és 1950 között - sokan bevallottan ugy gondolták, hogy az elektronikus szerkezetek sokkal kevésbé megbizhatók, mint az elektromechanikusok. E pont körül sok érvelés és vita forgott és egy bizonyos ideig az általános nézet és gondolkodás nem is változott meg. Abban az időben az elektronikus eszközöknek sok fogyatékosságuk volt ugyan, de sebességük oly nagy volt, hogy mindent összevetve nem lehetett kétség: hihetetlenül gyorsabbak, mint az összehasonlitható elektromechanikai eszkö-zök.

-.-.-.-.-

A project 1946. tavaszán indult meg az Institute for Advanced Study-nál, és az elképzelések szerint tematikusan összetett volt. Volt egy csoport, amely a logikai tervezéssel foglalkozott; ez először Burks-ből, Neumannból és belőlem állt, később pedig csak Neumannból és belőlem. Volt egy mérnöki csoport, amely a tervezési ötleteket "hardware"-re forditotta le; ezt először Julian Bigelow, később James Pomerene vezette. Volt egy numerikus analizis csoport, amelyik ennek a klasszikus tárgynak a ma ismert alakra való hozásával foglalkozott; ezt Neumann és én vezettük, nomeg néhány kiváló matematikus, akik hosszabb-rövidebb időre vendégeskedtek az intézetben. Végül volt egy numerikus meteorológiai csoport, amely céljául tüzte ki, hogy a meteorológiát a kvalitativ, leiró jellegü tudományágból kvantitativvá alakitják azáltal, hogy megoldják az atmoszférára kidolgozott különböző modellek differenciálegyenleteit; a csoportot Neumann és Jules Charney vezették /ez utóbbi kitünő meteorológus/ és néhány további meteorológusból állt, akik időről-időre szintén meglátogatták az intézetet. Összegezve tehát a project ambiciózus volt és végül teljes siker koronázta.

A logikai tervezésben végzett munka jelentőségét tetszetősen összegzi Paul Armer a Datamation-ben:

"Ki találta fel a tárolt programozást? Talán az érintetteken kivül senkit nem érdekel tulságosan, hogy kié az érdem - az elv megvan és bizonyára az emberi haladás fontos mérföldköveinek egyikeként fog állni... A fő várományosok az alábbiakban ujranyomott cikk szerzői, valamint a Pennsylvania Egyetemen a J. Presper Eckert és John Mauchly által vezetett csoport. Kétségtelenül mások is hozzájárultak az ügyhöz, nem utolsósorban Babbage...

Mindazonáltal az itt ujranyomott cikk a döntő a számitógépek területén. Nemcsak hogy specifikálja egy tárolt programu számitógép tervezését, hanem előre lát sok fogós problémát és szellemes megoldásokat is javasol azokra. A cikkben leirt gép /amely különféle neveken - IAS vagy Princeton-i vagy Neumann-féle gép - ismert/ megépült, lemásolták /sosem pontosan/, majd a másolatokat is...

Amikor a cikk született, az automatikus számolás elve /a Harvard-i Mark I alapján/ csakugy, mint az elektronika által hozott nagy fejlődés /az ENIAC kapcsán/ már ismert volt. Az akkori "state-of-art"-tól a cikkben tárgyalt részletekig vezető ugrást ma nehéz objektiven felmérni..."[13]

---

13 A Datamation az 1962. évi 8. számában Armer előszavával ujra leközölte Burks, Goldstine és Neumann "Preliminary Discussion of the logical Design of an electronic digital computing instrument. Part I." cimü, 1946. junius 28-án megjelent és 1947. szeptember 2-án második kiadásban napvilágot látott dolgozatát. Az idézet az előszóból való.

Valóban azok a gondolatok, amelyek az ebben az időszakban általunk kibocsátott dolgozatokban jutottak kifejezésre, az 1950-es évek közepétől eszközként hatottak a számitógép-ipar utjának formálásában, és még ma is gyakran hallani a Neumann-féle architekturáról, illetve gépről.[14] A mérnöki csoport valóra váltotta ezeket a papir-gondolatokat, és az eredményként létrejött gép ma is kiállitva látható a Smithsonian Intézet Tudományos és Müszaki Muzeumában, Washingtonban /D.C./. A numerikus analizis csoport számos, ma már klasszikus cikket produkált a mátrixok, valamint a parciális differenciálegyenletek megoldása témakörében. Ezek a dolgozatok sok további kutatómunkához adtak kezdő impulzust olyan numerikus technikák területén, amelyek a modern számitógépben szokásosak. Talán a legfontosabb bevezetett koncepció a numerikus stabilitásé volt, a domináló téma pedig a stabil algoritmusok kifejlesztése. A numerikus meteorológiai csoport olyan sikeres volt, hogy manapság a legtöbb ország meteorológiai hivatala azokat a módszereket használja az időjárás rutinszerü numerikus számitására, amelyek az Institute for Advanced Study-ban kifejlesztett eredetinek a származékai.

- . - . - . - . -

A kollektiv munkában való részvétele mellett Neumann egyedül is dolgozott, méqpedig az automaták elméletén,

---

14 További, Neumann és általam irt dolgozatok megjelenési helye: "Planning and Coding of Problems for an electronic computing instrument. Part II." I. II. és III. kötet, 1947-48.

valamint az idegélettan bizonyos területein. Az előbbi tárgyban két nagyobb eredményt is elért: felfedezte azt, amit szemléletesen önmagukat reprodukáló automatáknak nevezett, ezenkivül megindította a megbizhatatlan alkotóelemekből felépülő automaták kutatására irányuló munkát. Ami az önmagukat reprodukáló automatákat illeti, Neumann meghalt, még mielőtt alkalma lett volna vizsgálódásai valamennyi szakaszának véghezvitelére; szerencsére jegyzetei megfelelő állapotban voltak ahhoz, hogy Burks befejezhessen minden bizonyitást és publikálja az eredményeket.[15]

Ebben az elméletben Neumann azt az érdekfeszitő kérdést vizsgálja, hogy milyen komplexnek kell lenni ahhoz egy gépnek, hogy a termékei is ugyanolyan komplexek legyenek, mint maga. Nyilvánvalóan a legtöbb gép nem ilyen; általában egy nagybonyolultságunak tekinthető gép legjobb esetben is csak eléggé egyszerü funkciók végrehajtására képes. Amit Neumann fölvetett és aztán sikeresen megoldott, az volt, hogy hogyan kell olyan szerkezeteket tervezni, amelyeknek a bonyolultsága eléggé nagy ahhoz, hogy termékeik saját maguk pontos másai legyenek.

Ez az elemzés szorosan összefügött az emberi idegrendszer iránti érdeklődésével, amely a számitógép és az

---

15 Neumann, Theory of Self-Reproducing Automata, Urbana and London, 1966. Szerkesztette és befejezte A. W. Burks.

agy közti kapcsolatról szóló kötetét eredményezte.[16] Sajnos, a könyv megirására akkor vállalkozott, amikor már sulyosan beteg volt, és egyszerüen képtelen volt ugy belevinni meglátásait és észrevételeit, mint ahogy azt teljesen egészségesen bizonyára tette volna.

Ugyancsak nagy kár, hogy Neumann nem érte meg a DNS és RNS strukturájának felfedezését. Ez az eredmény bizonyára nagy örömet okozott volna számára, és maga is minden valószinüség szerint belemerült volna annak egyik-másik vonatkozásába. Egészen biztos, hogy tisztán látta az automaták elméletében kialakitott elképzelései és a genetika szoros kapcsolatát.[17]

Neumannak a megbizhatatlan komponensek területén végzett munkája jelentette az automata-elméleti tanulmányainak másik oldalát. Megértette, hogy milyen fontos lenne felderiteni egy fizikai mechanizmus - mint pl. egy számitógép - lehetséges bonyolultságának határait, és tudni akarta, hogy vannak-e ilyen határok.

Meg tudta mutatni, hogy megfelelő redundancia árán tetszőleges megbizhatóságu automaták gyárthatók megbizhatatlan épitőelemekből. Később ezt a témát Winograd és Cowan vitték tovább egy igen elegáns könyvben, amelyet

---

16 Von Neumann, The Computer and the Brain, New Haven, 1958.

17 V.ö. például azzal a dolgozattal, mely a "The general and logical theory of automata" cimet viseli és 1948-ban adta elő Neumann.

Neumann szivből nagyra értékel volna.[18] A könyvben a szerzők szellemesen bevezették az entrópia fogalmát az analizisbe és igy megtették azt, amiről Neumann is mindig érezte, hogy meg kellene tenni. Konkréten ezt irta: "Ahogy jelenleg kezeljük a hibát, az nem kielégitő és ad hoc. A szerző meggyőződése, amit sok éve hangoztat, hogy a hibát a termodinamika módszerével kell kezelni, és a termodinamika elméletének tárgyává tenni, mint ahogy az az információval történt, Szilárd Leó és C.E. Shannon munkája révén."[19]

Vétek lenne anélkül befejezni ezt a cikket, hogy egy pár személyes szót ejtenék Jancsiról vagy Jancsikáról. Mint talán tudják is, nemcsak nagy és virtuóz matematikus volt, hanem emberi lénynek is nagy, aki csodálatos humorérzékkel is kielégithetetlen étvággyal volt megáldva az ételek, tréfák és főleg mindenfajta olyan tudás iránt, amely valamilyen kapcsolatban állt érdeklődésével. Érdeklődési köre kétségkivül egyetemes volt, és nemcsak lényegében az egész matematikát fogta át, hanem még olyan dolgokat is, mint pl. Bizánc történelme. Állandóan uj tennivalókat keresett magának, uj meghóditandó világokat, és tragikus, hogy éppen amikor magas közhivatalba került, végzetesen megbetegedett.

Az egyik legszimpatikusabb dolog, amely számomra Eisenhower elnökkel kapcsolatban ismert, az, hogy igen ked-

---

18 Reliable Computation in the Presence of Noise, Cambridge, 1963.

19 Összegyüjtött müvei. Vol. V., p. 329.

vesen bánt Neumannal, gyakran a Fehér Házba kérette mű-szaki megbeszélésekre. Az elnök azzal is törődött, hogy amikor Jancsi olyan beteg lett, hogy kórházba kellett mennie, az egyik legjobb kórházban a legjobb lakosztályt kapta, mindjárt az elnöki lakosztály mellett. Ezekben a szobákban töltötte Neumann utolsó napjait. Szomoru, hogy édesanyja, Gitus is meghalt, miközben ő a kórházban volt. Minden nap meglátogatta és vele volt a kórházban, egé-szen addig, amig ő maga sem tudott már tovább élni.

Ha az elmulása szomoru is volt, az élet majdnem mindig élvezetes volt számára. Nagy életkedv és életszeretet volt benne, ami tulajdonképpen sohasem hagyta el telje-sen. Könyvei, dolgozatai sokáig fennmaradó emlékművet állitanak neki, a figyelemre méltó matematikusnak. Vé-leményem szerint kétségtelen, hogy bárki másnál többet tett a mi időnkben a matematika határainak kiterjeszté-sére és annak megalkotása érdekében, amit ma matemati-kai tudományoknak nevezünk.

HOTEL PLAYA DE CORTES

THE DESERT RESORT BY THE SEA

APARTADO No 66 - GUAYMAS - SONORA - MEXICO

ERNEST BYFIELD
PRESIDENT

ROBERTO A. ELIAS
MANAGER

December 29, 1949.

Dear Herman,

please excuse my delay in getting around answering your detailed letter to Illinois (hand-written, arrived about December 14), which reported on the state of the computer-project and of the retyping of the operator-theory notes. I wanted to communicate with you regarding the more urgent R.D.B. matters first. Now I can come back to the earlier matter. ——

Regarding the operator-theory notes:

The notational matter in Appendix One: agree with you, that it is inelegant, and worse, to use μ, ν as summation-indices, when μ is the normal symbol for a measure function. I concur with your suggestion to use ρ, σ as summation-indices instead.

The use of the symbols P_m in the proof of Theorem 12'.3: I agree with you, that P_m (or P) should not denote sets, since it denotes points, too. Since D denotes a set, might C not be used? Or S? ——

[./. Over ./.]

3386

Neumann levele prof. Goldstine, Herman-hoz.

/ 1949. december 29./

Regarding the whole of the project:

I will not write much about this, since I assume that your letter to Las Cruces, that failed to get there in time has more recent information in it. I left instructions in Las Cruces to have that letter forwarded to Los Alamos, so I hope to find it there at my arrival. (The R.D.B. material did, of course, reach me here. I assume that my drafts, etc., connected wit it have reached you in the mean time.) I will probably also communicate w directly after I get to Los Alamos.

From what you tell me in the letter that I have, I infer that the William set-up moves quite well, but that there is an incipient general slow-down, and that the arithmetic organ in particular, is dormant once more. This is not too surprising, we will have to discuss how to get some excitement induced again.

With best regards,

as ever

NEUMANN - A SEJTATOMATA ELMÉLET MEGALAPIITÓJA ÉS HATÁSA A NEM-KLASSZIKUS GÉPARCHITEKTURÁK KIALAKULÁSÁRA

Legendi Tamás /Szeged/

I.

A tudományos kutatásban az egyik legnagyobb teljesitmény a teljesen új utak megnyitása, az első alapvető lépések megtétele. Egyáltalán nem könnyűek a további lépések, a kisebb vagy nagyobb eredmények elérése, ezek megszületésének azonban szükséges feltétele az adott új tudományterület felismerése, körülhatárolása, alapvető definicióinak és axiómáinak posztulálása, az első iránymutató fontosabb felfedezések kimunkálása.

Az úttörő géniusznak ezt a munkáját végezte el a sejtautomata elmélet terén Neumann János. Kivételes sokoldalúsága akár el is vonhatta volna erről a területről, azonban algebrai és automataelméleti ismeretanyaga és eredményei, mély kibernetikai érdeklődése, számitási eljárások végrehajtására alkalmas automataosztályok keresése mind-mind predesztinálta a sejtautomata elmélet megalapozójának szerepére.

Valóban utólag nagyon logikusnak látszik a párhuzamos működésü rendszerek egyik szélső esetenként is felfogható sejtautomata-fogalom. Hiszen ha eljátszunk a "sok processzor" /"sok automata"/ gondolatával, a "nagyon sok processzor" természetes határesete igen kézenfekvően involvál szabályos és egyszerü, elemenként lehetőleg kisszámú összeköttetést tartalmazó kapcsolódási struktúrát az igen nagyszámu elem között /mind az elvi, elméleti matematikai kezelés, mind az esetleges müszaki megvalósitás szempontjából igen előnyös a kis "szomszédságszám" és a szabályos, egyforma "szomszédság" feltételezése/.

Teljesen egyforma automatákat véve, amely ismét jelentős, nagy fontosságú és érdembeli korlátozás mind elvi, mind gyakorlati szempontból, már előttünk is áll a klasszikus sejtautomata definiciója.

Ehhez a definicióhoz Neumann nem egycsapásra, de igen céltudatosan jutott el a kinematikus automatákkal való foglalkozáson keresztül, részben Ulam inspirálására is. A létrehozott fogalom egyáltalán nem volt öncélú - több, jól megfogalmazott kérdésre adható /és meg is adott, pozitiv/ válasz keretét szolgáltatta. /Itt is megmutatkozott a tudományos kutatás egyik alapszabálya: rendkívül fontos a helyes kérdések feltétele./ Neumann megvizsgálta, hogy az általa definiált nagymértékben párhuzamos működésü, homogén lokális információ-átadáson és feldolgozáson alapuló automata rendszerek képesek-e tetszőleges számitási eljárások végrehajtására /kiszámithatóság tekintetében univerzálisak-e, képesek-e új /szűkebb, azonos, vagy bővebb képességekkel rendelkező/ automatarendszerek létrehozására, ésszerűen definiált módon, jól körülhatárolt feltételek mellett.

Megadott egy konkrét, 29 állapotú sejtekből álló, kétdimenziós /négyzetháló rácspontjaiban elhelyezkedő/ elrendezésű, négyes szomszédságú /minden automata saját és a négyzetháló négy szomszédos rácspontjában elhelyezkedő automata állapotát érzékeli, veszi figyelembe inputként uj állapotának az átmenetfüggvény segitségével való kiszámitásához/ sejtteret és annak egy konkrét átmenetfüggvényét.

Ebben az ilymódon teljesen definiált térben a működés az általános sémának megfelelően történik: minden egyes működési lépésben a tér minden sejtje egyidejüleg végrehajtja a /homogén, minden sejtben azonos/ átmenetfüggvényt /lokális vezérlésű teljesen parallel működés/.

Megjegyezzük, hogy a tér potenciálisan végtelen, minden időpontban azonban csak véges sok sejt aktiv. /A nem aktiv sejtek nyugalmi állapotban vannak; nyugalmi állapotban levő és nyugalmi állapotu szomszédokkal rendelkező sejtek nyugalmi állapotban is maradnak; egyébként a konkrét átmenetfüggvényben meghatározott szabályok szerint átmehetnek egyéb állapotba is./
Tehát a Neumann-i diszkrét, párhuzamos, lokális vezérlésü modell /kvázi/-végtelen is egyben.

Neumann megmutatta, hogy ebbe a konkrét, teljesen definiált térbe univerzális Turing gép és univerzális konstruktőrautomata /amely tetszőleges automatát, igy többek között saját magának egy másik példányát is képes létrehozni a térben/ beültethető.

Gondolatmenete és konstrukciójának részletei megtalálhatók hires könyvében, annak egyes fejezetei a "Sejtautomaták" /Gondolat, 1978./ kötetben magyarul is fellelhetők.

Neumann elméletalkotó munkája nem könnyen járható, de széles utat nyitott a nyomdokaiba lépő kutatóknak, akik aztán a maguk módján új és új ösvényeket vágtak, új területeket tártak fel eredményesen egyszerűbb univerzális tulajdonságú átmenetfüggvények felfedezésével, a legegyszerűbb átmenetfüggvények sokszor meglepő tulajdonságainak feltárásával és elemzésével, változatos matematikai vizsgálatokkal, fizikai-biológiai rendszerek sejtautomatákkal történő modellezésével, sejtautomata szimulációs nyelvek létrehozásával és szimulációs kisérleti eredmények elérésével, a sejtautomaták felől a számitástechnikában használható sejtprocesszorok felé tett konstrukciós és sejtprogramozási lépésekkel.

Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül igen rövid áttekintést adunk a fentiekben felsorolt témakörök, az azokban elért egyes eredmények jellemzésére. Már maguknak a témaköröknek a kiemelése is egy kicsit önkényes, talán a sejtprocesszor kutatás szempontjai motiválták, méginkább áll ez a kiemelt részeredményekre, amelyek azonban remélhetőleg jellemzik a sejtautomata kutatás törzséből elágazó ágakat és a rajtuk termő gyümölcsöket.

Neumann nagyjelentőségü, fontos számitási- és konstrukció-univerzális, viszonylag bonyolult automatájának egyik lehetséges ellenpólusát képviselik az igen egyszerüen megfogalmazható lokális átmenetfüggvények, amelyek mégis elég komplex viselkedést mutatnak fel.

Az egyik legegyszerübb ilyen függvény az u.n. Lindenmayer függvény /summa modulo 2 vagy antivalencia függvény/ amely egyszerü önreprodukciós /alakzatmásolási/ képességgel rendelkezik. Nemcsak játéknak, szórakoztató ábrának kellemes /bár kétségtelenül ezzel a tulajdonságával is hiveket toboroz a sejtautomatáknak/, hanem komoly matematikai vizsgálatok tárgyát is képezi, tulajdonságainak bizonyitása, általánositása /u.n. lineáris terek/, tervezett alkalmazásai /információ kódolás, dekódolás/ jelentősek.

A másik igen népszerü függvény az u.n. életjáték, amely a mod 2 függvény akármilyen alakzatra /konfigurációra/ biztositott egyszerü önreprodukciós képességével szemben konfigurációfüggően igen változatos globális viselkedést mutat fel /eltünő, vándorló, oszcilláló, utódokat létrehozó, konfigurációkat elnyelő stb. alakzatok egyaránt lehetségesek/. Korlátozott mértékben populációk adott élettérbeni viselkedését modellezi.

Egy sajátos problémaosztály alakult ki az elmúlt másfél évtizedben, amely /előre adott/ globális /sejttér/ "viselkedéshez", keresi az azt generáló, indukáló lokális viselkedést /átmenetfüggvényt/.

Tipikus példa erre a "sortűz" probléma, ahol minden sejtnek egyszerre kell átmennie egy adott állapotba ugy, hogy előzőleg egyikük sem veszi fel ezt az állapotot /"tűz"/.

Ennek a szinkronizációs problémának a megoldása is a lokalitás miatt nehéz; illetve az a súlyos feltétel, hogy az átmenetfüggvénynek tetszőleges számú /pl. egy dimenziós elrendezésü/ sejttel is működni kell. /rögzített véges sok sejtre egyszerü lokális algoritmus lenne: az egyik szélső "katona" a "szomszéd fülébe súgná" hány lépés - mennyi idő - múlva "lőjön", a szomszéd egyet levonna a lépésszámból, úgy adná tovább az utasitást/ Az egyik elterjedt megoldást különböző sebességü hullámoknak a szélhez történő küldése, visszaverődése és ütköztetése adja, igy felezni lehet a tetszőleges /véges/ számu sejtet, /rögzitett állapotszámu sejtekkel!/ majd az eljárást ismételjük a felezett szakaszokra.

Hasonló problémák még a "francia zászló", az "early bird" stb. problémák, mindezekről Vollmar professzor 1979-ben megjelent "Algorithmen in Zellularautomaten" c. könyvében is, Balzer, Hermann stb. publikációiban találhatók részletek.

Sok érdekes, jelentős vizsgálat mellett E. F. Codd 1968-ban megjelent Cellular automata c. monográfiája jelentett komoly előrelépést: 8 állapotú sejttel is megoldotta a kiszámitási és konstrukciós univerzalitást. Valamint szisztematikus vizsgálatokat végzett különböző állapot- és szomszédságszámu terek összehasonlitására, egymással történő modellezésére. Ezekkel a vizsgálataival iskolát alapitott, hasonló jellegű munkát sokan végeztek utána. Az elsők között volt interaktiv szimulációs nyelvének létrehozásával és következetes kisérleti használatával, ma már ez a hozzáállás a természetes és elterjedt.

A sejtautomaták automataelméleti és algebrai jellegű matematikai vizsgálata igen sokrétű, mint a matematika más érdekfeszitő ágaiban, itt is sokszor könnyen megfogalmazható problémák ugyancsak fogósnak bizonyulnak.

Lényeges megjegyezni, hogy elég eltérő eszközökkel kell és lehet kezelni a végtelen és a véges terek problémáit - matematikai szempontból mindkét terület érdekes és vonzó, gyakorlati szempontból elsősorban a véges terek vizsgálata fontos értelemszerűen.

A problémák közül szinte csak mutatóba megemlitjük az Éden konfigurációk /olyan konfigurációk, amelyeknek nincs elődjük, azaz lokális átmenet függvény végrehajtásával, billenéssel nem keletkezhettek, csak a külvilágból kerülhettek a sejttérbe/ jellemzését a lokális átmenetfüggvény által indukált globális leképezés bijektivitásával, a ciklizálással, eltűnő konfigurációkkal /olyan konfigurációk, amelyek a tiszta 0, azaz tiszta nyugalmi konfigurációba mennek át/. Ezzel összefüggésben nagyon érdekes kérdés és fizikai-biológiai rendszer-interpretációja is lehet a megfordithatóság /invertálás/ nehéz problémájának, amelyet sokan /köztük T. Toffoli/ vizsgáltak a globális leképezés szintjén.

Még érdekesebb, de nehezebb a kérdés a lokális átmenetfüggvények szintjén: vannak-e olyan átmenetfüggvény párok, hogy a pár egyik tagja "előre hajtja" a sejtteret, a másik pedig "vissza"? /azaz egy adott lokális átmenetfüggvény indukál egy globális leképezést, tegyük fel, hogy ez bijektiv, van-e lokális átmenetfüggvény, amely az inverz globális leképezést indukálja/ Katona Endre ért el szép eredményeket ebben a témakörben.

Fizikai, biológiai modellezési célokra is igen alkalmas a sejtautomata - általában diszkrét, párhuzamos müködésü, lokális vezérlésü rendszerek modelljeként. Gázmolekulák ütközésétől, sejtmembrán problémákig, szivizommodellezéstől /A. Burks!/ neuronmodellekig széles a felvetett modellek skálája.

A létrehozott szimulációs rendszerek /Herman, Brender, Vollmar, Pecht, Höllerer, Legendi stb./ sokat segitettek a sejtterek analitikus módon nehezen előre látható tulajdonságainak felfedezésében, a megtervezett "viselkedés", sejtalgoritmusok helyességének ellenőrzésében, a sejtprocesszor koncepció bevezetésének előkészitésé-

ben. Mert a sejtautomata elmélet alkalmazhatóságát éppen a sejtprocesszorok létrehozása, kifejlesztése és általános használatba vétele bizonyithatná.
Ehhez egyes előfeltételek részben adottak. A következő alfejezetben részletesen leirt technológiai változások ma már a párhuzamos müködésü számitási rendszerek gondolatának széleskörü elterjedését és gyakorlatának kezdetét eredményezték. A szekvenciális gépek kritikai szemléletének terjedése /kapu, tárolóelem szinten gépeink igen rosszul kihasználtak, az összefüggő "centralizált végrehajtás/szekvenciális végrehajtás/alacsony adatáramlási sebesség" koncepció sebességet, teljesitményt korlátozó hatását egyre többen látják tudatosan/ és az egyre nagyobb elérhető rendszerméretek megfogható közelségbe hozzák a sejtprocesszorok megvalósitását.

Az eddigi fő akadály pontosan a javasolt sejtek nagy méretéből és számából adódó megvalósithatatlanul nagy rendszerméret volt, ennek leszoritása, a sejtprogramozási metodológia és konkrét sejtprogramok készitése vezethet a realizálás felé. Kisebb müködő /képfeldolgozási célu/ célsejtprocesszorok, mint a GOLAY, a CLIP3 processzor ismertek és több országban, több kutatóhelyen, közte hazánkban is, például az MTA Automataelméleti Kutató Csoportnál is folyik sejtprocesszorok és programozási rendszereik létrehozására irányuló kutató - fejlesztő munka.

A sejtprocesszorok megjelenése lehetne az egyik legértékesebb eredménye, következménye a Neumann által létrehozott sejtautomataelméletnek.

II.

Neumann munkásságát Goldstine és Burks érdemeinek elismerése mellett alapvetőnek szokásos tekinteni a belső programvezérlésü digitális számitógépek területén. Valóban, a jórészt általa posztulált alapelvekre épül mindmáig a kereskedelmi forgalomba került számitógépek tulnyomó többsége az alapvető felépitést tekintve, bármilyen sok elvi és gyakorlati szempontból fontos réteg rakódott is ezekre /pl. mikroprogramozás, operációs rendszerek/.

Ez a koncepció forradalmian új volt a maga idejében, diadalútját jelentősen elősegitette a sok tekintetben korlátos átfogóképességü emberi gondolkodáshoz jól idomuló moduláris struktura és a szekvenciális végrehajtási mód. A döntő tényező azonban a centralizált végrehajtásnak nem is annyira az áttekinthető volta, hanem sokkal inkább a viszonylag kis processzor és rendszerméretet eredményező hatása, amely életképessé, a rendelkezésre álló technológiával megvalósithatóvá tette a javasolt konstrukciót.

Nem mellékes az sem, hogy a centralizált végrehajtás viszonylag alacsony szintü adatáramlást követel csak meg, ez is segiti a /gazdaságos/ megvalósitást.

Az a tény, hogy számitógépeink túlnyomó többségének a struktúrája lényegében változatlan maradt a különböző méretű és nemcsak felszini változások, a rendszerek nagyfokú külső /és belső/ bonyolódása mellett, csak részben irható a modularitást előnyben részesitő emberi gondolkodás, a szekvenciális programok elvileg könnyebben áttekinthető volta, pszichológiai nehézségek, a konzervativizmus vagy éppen a "tehetetlenségi erő", a kompatibilitási igények számlájára; főleg annak a következménye, hogy a már a korai technológiával is megvalósitható rendszerkoncepció nem döntő változtatása, bővitése mellett állandó folyamatos lehetőség nyilt a klasszikus számitógépek paramétereinek a javitására /sebesség- megbizhatóság- processzor teljesitmény- memória- háttér- stb. növelés; méret- disszipáció- fajlagos ár- stb. csökkenés/ a hardware technológiák viharos fejlődése következtében.

Ellenérv, helyesebben az adott technológia mellett más módon reálisan kielégithetőnek tűnő alkalmazási igény vagy pedig rendszerszintű komoly ellen-alternativa pedig hosszú időn át fel sem merült.

Még ma is igen komoly kifutása van a VLSI technológiák segitségével történő, hagyományosnak mondható tendencia, a klasszikus architekturák további miniatürizálásának, paramétereik jelentős javitásának. /"IBM 370/168 egy chipen"/.

A változó, fejlődő technológiai feltételek, különösen az LSI technológia megjelenése azonban már áttörte azt a rendszerméret korlátot, amely alatt csak a klasszikus architektúrák voltak életképesek /gyárthatók/. Az alap /hardware-technológia/ megváltozása igen gyorsan magával hozta a felépitmény /rendszerkoncepciók, lappangó felhasználási igények, párhuzamosság felé orientálódó programozási szemlélet terjedése/ változását.

Valóban, sok korai javaslat is ismert /pl. a Holland-gép, 1959 - három dimenziós elrendezésü sokprocesszoros rendszer/, azonban annak a tudatos és tömeges felismerése, hogy technológiai és fizikai törvények következtében a szekvenciális szervezésü gépek sebessége korlátos, csak akkor történt meg igazán, azaz kapott megfelelő sulyt, amikor ezt a határt kezdtük már megközeliteni, kezdtük tényleges akadálynak érezni és reális lehetőség is nyilt ennek a határnak nemcsak az elvi, hanem a tényleges gyakorlati átlépésére is.

A felhasználói igények is, mint a tapasztalat mutatja, állandóan előtte járnak a gépfejlesztésnek, jelentős húzóerőt képviselve - ez a tény változatlanul fennáll és a párhuzamos végrehajtás által biztositható minőségi ugrásra /amelynek azonban természetesen megvannak egy-egy adott technológia mellett a mennyiségi korlátai/ is megvan az igény. Minőségi ugrásról beszélünk a szokásos sebességváltozásnál sokkal nagyobb méretü /elvi és gyakorlati/ gyorsulás miatt is, de még inkább azért, mert a merev klasszikus szekvenciális programozási sémák helyett /az alapvetően párhuzamos folyamatokkal jellemezhető anyagi jelenségek adekvát modelljeként megjelenő/ igen sok esetben a probléma természetéhez jobban illeszkedő párhuzamos algoritmust használhatunk úgy, hogy azok gazdaságosan hajthatók végre a párhuzamos alapu architektúrán. Reális lehetőség nyílt átstrukturálható architektúrák létrehozására, esetenként, az egyes algoritmusokhoz, egyedi, optimális konfigurációk programozott kialakitására; nem a számitási eljárást kell "kerékbe törni" az univerzális szekvenciális gépen, hanem a számitási közeg idomulhat a végrehajtandó algoritmushoz, erőforrások, végrehajtási idő, vagy egyéb előre kitüzött célok szerint optimálisan.

Sokféle konkrét párhuzamos szervezésü gép /szimmetrikus multiprocesszorok, vektorgépek, osztott rendszerek, asszociativ processzorok, a sort még hosszan lehetne folytatni/ jelent meg a technológiai korlát áttörésével - ezek ismertetése nem tartozik tárgyunkhoz. Részletesen tárgyaltuk azonban a kialakult helyzetben a változás várható irányát, a párhuzamos müködésü rendszerek folyamatos és ésszerü előretörését. Felvethető a kérdés: vajon ez a folyamat a közeljövőben vagy távolabbi jövőben a klasszikus Neumann-i architektúra teljes megszünéséhez fog vezetni? Bár az "igen" válasz sem zárható ki, érdemleges válasz csak relativ értelemben adható /ilyen és ilyen technológiai feltételek mellett ... ez és ez várható/ és azt az összefoglalásban meg is kiséreljük explicit formába önteni, most inkább azt vizsgáljuk meg, hogy <u>a közeljövőben milyen területeken maradnak meg előreláthatóan a klasszikus struktúrák.</u>

Egyrészt a többprocesszoros rendszerek egy részénél: elsősorban ott, ahol a strukturális felépités olyan kis- közepes- méretü feladatok elvégzését bizza az egyes processzorokra, amelyeket hagyományos gép oldhat meg optimálisan /célszerűen maximált méretűek és árúak az egyes processzorok, univerzalitást követelünk meg tőlük, sebességigényünk nem túl magas, mert az egész rendszer párhuzamos működésével biztosítjuk a megfelelő sebességet/.

Másrészt a fenti feltételeknek eleget tevően üzemeltetendő mikroprocesszorok, amelyeknek a hétköznapi életbe való tömeges behatolását várhatjuk /igen sokféle hatással/, szintén klasszikus struktúrájúak, értelemszerüen.

És elég természetesen a közeljövőben még vezető szerepe lesz a szekvenciális gépeknek a kis-közepes teljesitményü kategóriában, ahol ár/teljesitmény viszonyuk kedvező.

Még egy érdekes példát hozunk arra, hogy nem /is/ anynyira kibékíthetetlen az ellentét /mindig/ a Neumann-i és a nem Neumann-i architektúrák között: W. Händler professzor /Erlangeni Müegyetem/ a "vertikális processzálás" egyik kiemelkedő szakértője mutatta meg könyvében és 1979. nyarán a Neumann János Számitógéptudományi Társaságban tartott előadásában is, hogy a szópárhuzamos bitsoros asszociativ feldolgozás visszavezethető "90^{o}-kal elforditott" Neumann gép/ek/ müködésére is, persze kihasználva az egy szón végezhető bitpárhuzamos műveleteket és a korlátozott szóhossz miatt Neumann gépek tömbjét használva az asszociativ processzor teljes szópárhuzamosságának elérésére.

/Ez az észrevétel egyébként módot ad hibrid gép: szekvenciális és asszociativ üzemmódban is működtethető architektúra gazdaságos létrehozására./

Összefoglalásul azt mondhatjuk, hogy a Neumann gépek koncepciója rendkivül hasznosnak bizonyult, hosszú időszakon át egyeduralkodó volt és a technológiai fejlődés következtében reálissá vált egyéb koncepciók mellett jelenleg és a közeljövőben is megőrzi még vezető helyét a kisközepes teljesitményü rendszerek területén, várhatóan hosszu távon domináns marad a hétköznapi alkalmazásokat tömeg méretekben először lehetővé tevő mikro teljesitményű gépek területén, beépül a párhuzamos működésű rendszerek egy részébe /különösen a szimetrikus multiprocesszorokba és az osztott rendszerekbe/. Jelenlegi tudásunk mellett azt mondhatjuk, hogy a Neumann gépek bizonyos peremfeltételek mellett /rögzitett, viszonylag kis rendszerméret, univerzalitási követelmény, viszonylag nem magas sebességigény/ optimálisak /önálló működésre vagy rendszer részeként, ha arra hasonló feltételek állnak fenn/.

III.

Egy rövid, személyes orientáltságú alfejezettel szeretném befejezni ezt a Neumann sejtautomata elméleti és számitógép architekturális munkáinak szentelt fejezetet - hiszen az utóbbi több mint fél évtizedben kutató munkám gerincét, javát pontosan annak szenteltem, hogy hogyan lehetne a hagyományos, Neumann által megalapozott elvi és matematikai jelentőségű sejtautomata elméletet kiindulási alapnak tekinteni, hatékony, nagy sebességű sejtprocesszorok létrehozására hasznositani.

Ez a munka igen sok szellemi élvezetet szerzett mind az elvi, matematikai, mind a konstrukciós és a sejt-algoritmus készitési fázisokban, sok-sok tanulásra késztetett alkalmazási területek felkutatása során, sok gondot okozott és okoz megfelelő /LSI/ technológia elérése, kutatási erőforrások biztositása; azonban az egyre több kutatási részeredmény pozitiv visszacsatolása, a munka várható hasznosságának érzete kárpótolt és kárpótol az elszenvedett kudarcokért, a bejárt zsákutcákért is - nos, mindez aligha történhetett volna igy meg, ha Neumann akkor és úgy nem vág utat az ismeretlenbe; egy tanitványa, akit ma Arthur Burks professzor néven ismer és tisztel a világ, nem adja közre /jelentős saját munkáját is igen szerényen hozzátéve/ Neumann posthumus könyvét. Ez szolgáltatta az alapot, a kiindulást E.F. Codd rendszerező, általánositó és Neumann egyes eredményeit egyszerüsitő, javitó monográfiájához, amely igen sok későbbi vizsgálatnak mutatott irányt és nagy lökést adott az egész világon megindulő/ folytatódó sejtautomata kutatásnak.

Ez a szerteágazó, gazdag téma ezen a vonulaton jutott el Magyarországra is: Fáy Gyula, Drommerné Takács Viola, Domán András közvetitésével.

Az MTA Automataelméleti Kutatócsoportnál jelenleg folyó projekt célja létező technológiával megvalósitható, igen hatékony /gazdaságos/, nagysebességü sejtprocesszorok létrehozása, programozása és alkalmazása.

A nemzetközi szakirodalomból ismert eredmények és saját kutatási eredményeink nagymértékben valószinüsitik, hogy a "nem-Neumann-i" gépek bővülő családjába rövidesen bekerülnek a Neumann-i sejtautomaták korszerü utódai - a sejtprocesszorok is.

NEUMANN JÁNOS MATEMATIKAI KÖZGAZDASÁGTANI ÉS OPERÁCIÓKUTATÁSI MUNKÁSSÁGA

Prékopa András /Budapest/

1. Bevezetés

Neumann János klasszikus eredményeket ért el a játékelmélet, az operációkutatás matematikai elmélete és a matematikai közgazdaságtan terén is. Ezek közül legkiterjedtebb a játékelméleti munkássága. A játékelmélet a Neumann - Morgenstern kooperáció révén közgazdasági elméletté is továbbfejlődött. Ezen kivül a fejlődő gazdaság modellje jelenti még Neumann közgadaságtani munkásságát. Neumann jelentősen hozzájárult a lineáris programozás fejlődéséhez is a dualitás - kapcsolat és a dualitás tétel felismerése révén. Megjegyzendő, hogy a játékelmélet és a lineáris programozás között szoros kapcsolat van, Neumann tehát játékelmélete révén egyébként is kasszikusa és előfutára a lineáris programozásnak. A fentieken kivül Neumann a játékelmélet feladatának numerikus megoldására is tett javaslatokat, melyek azonban hatékonyságban elmaradnak a szimplex módszerek nyujtotta lehetőség mögött.

2. A minimax tétel

Neumann 1926 decemberében számolt be először bizonyos játékelméleti eredményeiről a Göttingeni Matematikai Társulat egyik előadóülésén. Ebben az évben szerezte meg Budapesten a matematikai doktorátusát és nyert magántanári kinevezést a berlini egyetemre. Doktori értekezése axiomatikus halmazelmélettel foglalkozott, mely a játékelmélettől távol áll, igy feltehetjük, hogy a szóbanforgó eredményeket 1926 őszén, berlini tartózkodása idején érte el. Erre vall az is, hogy az előadásának kibővitett anyagát tartalmazó, 1928-ban megjelent /A/VI.1/ cikke elején Berlint jelöli meg működése szinhelye gyanánt.

A dolgozat cime magyarra forditva: "A Társasjátékok Elméletéhez". E cikk legnagyobb érdeme az un. minimax tétel megfogalmazása és bebizonyitása. Érdemes a tételt a játékelmélettől elvonatkoztatva kimondani, minthogy a jelentősége is általánosabb.

Legyen A tetszőleges m x n -es mátrix és X, Y jelöljék a következő halmazokat:

$$X = \left\{ \underline{x} \,\middle|\, \underline{x} \in R^m,\ \underline{x} \geqq \underline{0},\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\},$$

$$Y = \left\{ \underline{y} \,\middle|\, \underline{y} \in R^n,\ \underline{y} \geqq \underline{0},\ \sum_{k=1}^{n} y_k = 1 \right\}.$$

Érvényes az alábbi egyenlőség:

$$\max_{\underline{x} \in X} \min_{\underline{y} \in Y} \underline{x}' A \underline{y} = \min_{\underline{y} \in Y} \max_{\underline{x} \in X} \underline{x}' A \underline{y} . \quad /2.1/$$

E tételnek a kétszemélyes záró összegü játékok elméletében való jelentőségét röviden összefoglaljuk. Tegyük fel, hogy két játékos játszik egy játékot, mely abban áll, hogy mindegyik választ egy-egy stratégiát a rendelkezésre álló stratégia halmazból; ezt követően egy véletlen hatás is érvényesülhet, végül a második játékos bizonyos összeget fizet az első játékosnak /ez lehet negativ összeg is, mely esetben a második játékos nyer, az első pedig veszit/. Ha az első játékosnak m, a másodiknak pedig n stratégiája lehetséges és a játék kimenetelét a véletlen nem befolyásolja, akkor az egyes stratégiapárok használata esetén az első számu játékos nyereményeinek értékeit az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kifizetési mátrixban foglalhatjuk össze. Az első játékosról feltételezzük, hogy olyan stratégiát akar választani, melyre $\min_k a_{ik}$ a lehető legnagyobb, a másodikról pedig feltesszük, hogy a $\max\limits_{i} a_{ik}$ értéket akarja minimalizálni. Amennyiben

$$\max_{i} \min_{k} a_{ik} = \min_{k} \max_{i} a_{ik} \qquad /2.2/$$

és ez az a_{pq} elemmel egyenlő, akkor a p-edik, ill. q-adik stratégiákat játékosainkra nézve <u>optimális tiszta stratégiáknak</u> nevezzük, és azt mondjuk, hogy a_{pq} a <u>játék tiszta értéke.</u>

Ha /2.2/ nem áll fenn, akkor uj játékot konstruálunk, melynek stratégia halmazai X és Y. A játékot fizikailag oly módon képzeljük el, hogy a korábbi 1,...,m, illetve 1,...,n jelü un. tiszta stratégiák közül a játékosok véletlenszerüen választanak egyet-egyet az $\underline{x} \in X$, illetve az $\underline{y} \in Y$ valószinüség-eloszlások szerint, egymástól sztochasztikusan függetlenül. Az $\underline{x}$, $\underline{y}$ valószinüség-eloszlásokat <u>kevert stratégiáknak</u> nevezzük. Az első játékos várható nyereménye ekkor $\underline{x}'A\,\underline{y}$ lesz. Neumann tétele ezek után azt mondja ki, hogy /2.1/ fennáll, vagyis mindig létezik optimális kevert stratégia-pár. A /2.1/ számértéket a játék <u>értékének</u> nevezzük.

A dolgozat foglalkozik a többszemélyes zéró összegü játékokkal is, ezek tárgyalásában is a fenti tétel játszik fontos szerepet.

Neumann e dolgozatában még csupán egy rövid lábjegyzetben emliti a játékelmélet közgazdasági jelentőségét. Azt irja, hogy "a klasszikus nemzetgazdaságtan ugyanezt a problémát veti fel: mit tesz adott külső körülmények között az abszolut egoista homo oeconomicus?"

A játékelmélet közgazdaságtani alkalmazásaira azután került sor, hogy Neumann és Morgenstern Princetonban megismerkedett és közös munkába kezdett.

3. A Neumann - Morgenstern könyv

Neumann már 1930-ban a Princeton Egyetem tanára lett, ezt 1933-ban felváltotta az Institute for Advanced Study professzorságával, amely poziciót 1957-ben bekövetkezett haláláig megtartotta. Morgenstern 1938-ban ment Princetonba, miután Hitler elfoglalta Ausztriát és őt bécsi professzorságából, továbbá a Gazdasági Ciklus Kutató Intézet éléről elmozdították.

Morgenstern egy korábbi, a gazdasági egyensullyal kapcsolatos munkája /D/14/ olyan gondolatokat tartalmazott, melyek kézenfekvővé tették a Neumann - féle játékelmélet alkalmazását. Erre Eduard Čech hivta fel Morgenstern figyelmét 1935-ben, mikor

Morgenstern Bécsben a Menger-féle matematikai közgazdaságtani szemináriumon előadást tartott. A Neumann - Morgenstern kooperáció azonban csak Princetonban jött létre. Morgenstern eredeti célja az volt, hogy Neumann 1928-as cikke alapján egy közgazdászoknak szóló, részletesebb és magyarázó cikket irjon. A cikk irása közben gyakran konzultált Neumannal. A cikk oly terjedelmesnek igérkezett már, hogy két cikk anyaga kijött volna, amikor elhatározták, hogy együtt irják meg, mégpedig egy kis könyv formájában. Kis könyv helyett végül egy 640 oldalas monumentális mű született és látott napvilágot 1943-ban Theory of Games and Economic Behaviour cimen /B/11/.

A könyv nagyigényű. A játékelmélet az egyén gazdasági magatartásának matemetikai leirására szolgáló fundamentális és egzakt eszköz gyanánt jelenik meg és mint ilyen, hivatott a gazdasági jelenségek széles körére magyarázatot adni. A szerzők kifejezik azt a reményüket, hogy könyvükkel nagymértékben hozzájárulnak a közgazdaságtan matematizálódásához, ezzel együtt annak egzaktifikálódásához, mely vonatkozásában a természettudományok lényegesen előbbre vannak és a közgazdaságtannak most nagy lépésekkel kell előre haladnia. Az ut a közgazdaságtan számára azonban már lerövidithető.

A könyv egyik mellékterméke a hasznosság elmélet /utility theory/ kifejtése és axiomatizálása, ez azóta a közgazdaságtani tankönyvek standard anyagává vált. A játékosok ugyanis hasznosságot akarnak maximalizálni, ilyenformán tehát a hasznosság fogalmát a szerzőknek kellett megalapozniuk.

Morgenstern egyik cikkében azt irja, hogy miközben a könyv készült /1941-ben és 1942-ben/, egy hideg téli délutánon tett sétája alkalmával bement melegedni az Institute for Advanced Study könyvtárába és ott véletlenül kezébe került Borel francia matematikusnak Traité du Calcul des Probabilités cimü könyve és ebben felfedezte Jean Ville dolgozatát /D/16/, melyben a szerző a Neumann-féle minimax tételre uj és az eredetinél egyszerübb bizonyitást adott. Ez 1938-ban jelent meg. Jean Ville munkájának a felfedezése jó időben történt. Erre támaszkodva Neumann és Morgenstern egyszerübb, elegánsabb tárgyalást nyujthatott a könyvben az egész játékelméletre, főleg pedig a minimax tételre, melynek eredeti, 1928-as Neumann-féle bizonyitása sokkal bonyolultabb volt és az ugyancsak nem elég egyszerüen bizonyitott Brouwer-féle fixpont tételt használta fel.

Itt emlitjük meg, hogy az 50-es évek elején vita támadt Fréchet francia matematikus és Neumann között a játékelmélet megalapozásának prioritását illetően. Emil Borel hires francia matematikus 1921-ben, 1924-ben és 1927-ben irt /D/7/, /D/8/, /D/9/ dolgozataiban valóban megfogalmazta a játék, a tiszta és a kevert stratégia fogalmát és néhány speciális 2x2-es mátrixu játékot részletesen megvizsgált. Azt sejtette azonban, hogy a minimax tétel nem igaz általánosságban. Mármost Fréchet szerint Jean Ville megmutatta, hogy a minimax tétel lényegében ismert volt, mert könnyen következett a konvex halmazok elválasztási tételeiből, illetve az un. alternatívák tételeiből. Neumann azt válaszolta erre /A/VI. 2/, hogy a minimax tétel előtt tulajdonképpen semmi publikálni való nem volt a játékelméletből. Ő Boreltől függetlenül, Borel munkáit nem ismerve fejlesztette ki elméletét. Ha Borel munkáit ismeri, lehet, hogy azok elkedvetlenitették volna a témától, hiszen Borel azt sejtette, hogy a minimax tétel nem igaz. Hogyan lehet valaki megalapozója egy elméletnek, ha annak alaptételéről azt sejti, hogy az nem érvényes. A minimax tétel és a konvex halmazok közötti összefüggés pedig szerinte távolról sem triviális,amit az is mutat, hogy az ő 1928-as és Jean Ville 1938-as cikkének megjelenése között 10 év telt el és senki sem publikált eközben cikket erről a kapcsolatról.

E sorok irója ugy gondolja, hogy az igazság inkább Neumann, mint Fréchet oldalán áll. Neumann érvelése elfogadható.

4. A játékelmélet feladatának numerikus megoldásáról

A játékelmélet feladatának numerikus megoldására vonatkozólag Neumann három dolgozatot publikált

/A/VI.4/, /A/VI.7/, /A/VI.9/. Az /A/VI.4/ dolgozat a feladatot differenciálegyenlet rendszer megoldására vezeti vissza. A /A/VI.9/ dolgozat egy oldalból áll, egy heurisztikus elvet közöl arra az esetre vonatkoztatva, amikor a játékosok stratégiáinak a száma nagy. Végül, a harmadik /A/VI.7/ dolgozatban előbb megfogalmazza a feladatot oly módon, hogy keresendő olyan $\underline{x} \geq \underline{0}$, $\underline{y} \geq \underline{0}$ és k, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, x_i \geq k , \qquad j=1,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, y_j \leq k , \qquad i=1,\dots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 , \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 .$$

Az eljárás lényegében a

$$= \sum_{i=1}^{m} u_i^2 + \sum_{j=1}^{n} v_j^2$$

függvény iterativ minimalizálásában áll, ahol

$$u_i = \max\left(0, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j - k\right), \ i=1,\dots,m ,$$

$$v_j = \max\left(0, k - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i\right), \ j=1,\dots,n .$$

Neumann megjegyzi, hogy az eddig kipróbált feladatok esetében Dantzig szimplex módszere hatékonyabbnak bizonyult, de reméli, hogy az ő módszere is az eddigieknél sokkal gyorsabbá tehető.

Itt emlitjük meg Neumann rövid /A/VI.10/ dolgozatát, melyben a szimmetrikus, n-személyes játék olyan megoldásait tanulmányozza, melyekben minden, legalább n-1 - személyes koalició nyer és minden kisebb koalició veszit.

5. Lineáris programozás

A lineáris programozás vonatkozásában Neumann nem kisebb eredményt ért el, mint a dualitás kapcsolatának felismerése és a dualitás tételének majdnem teljes bizonyitása.

Ez a tétel mai alakjában a következőképpen szól. Tekintsük az alábbi lineáris programozási feladatokat

	max $\underline{c}'\ \underline{x}$,	
Primál	feltéve, hogy $A\ \underline{x} \leqq \underline{b}$,	/3.1/
feladat	$\underline{x} \geqq \underline{0}$,	
Duális	min $\underline{b}'\ \underline{y}$,	
feladat	feltéve, hogy $A'\ \underline{y} \leqq \underline{c}$,	/3.2/
	$\underline{y} \geqq \underline{0}$;	

ha e két feladat közül valamelyiknek van megengedett megoldása /a feltételeknek eleget tevő vektor/ és véges optimuma, akkor ugyanez érvényes a másik feladatra is és a két optimum - érték egyenlő.

Neumann 1947-ben találkozott Dantziggal, aki akkor már felfedezte a szimplex módszert. Miután Dantzig tájékoztatta Neumannt a lineáris programozásban elért eredményeiről, ezt követően Neumann megirt és az Institute for Advanced Study-ban közzétett egy dolgozatot /A/VI.8/, melyben a /3.1/ - /3.2/ alatt leirt dualitás kapcsolatot, továbbá magát a dualitás tételt is közölte. A cikk módszertanilag a lineáris egyenlőtlenségek elméletére támaszkodik, melyet játékelméleti könyvében is - mint láttuk - intenziven felhasznált. Neumann bizonyitása azonban egy ponton hiányos. Ahelyett ugyanis, hogy a lineáris egyenlőtlenségek Haar-féle tételére hivatkoznék, Farkas tételét használja. Az előbbi inhomogén, az utóbbi pedig homogén leneáris egyenlőtlenségekre vonatkozik. Neumann azonban nevet nem emlit, a lineáris egyenlőtlenségek alaptételéről beszél csupán, ami - a felhasználás módjából kiviláglóan - számára Farkas tételét jelenthette. Haar tétele ekkor már kb. 30 éve ismert volt. Első bizonyitása 1918-ban jelent meg /D/12/. Ha Neumann ezt ismeri, akkor nem véti el a bizonyitást. Ismerkedjünk meg közelebbről ezzel a hibával. A /A/IV.8/ dolgozat 3. oldalán azt olvassuk, hogy az /a jelöléseket kissé módositottuk/:

$$a_o - \underline{a}' \ \underline{x} \geqq 0$$

egyenlőtlenség következménye az

$$\underline{x} \geqq \underline{0},$$

$$\alpha' - \underline{x}' \ A \geqq \underline{0}'$$

egyenlőtlenségeknek, tehát létezik olyan $\underline{r} \geqq \underline{0}$

és $\underline{\xi} \geqq \underline{0}$ vektor, hogy

$$a_0 - \underline{a}' \, \underline{x} \equiv r'\underline{x} + (\alpha' - x' A)\underline{\xi} .$$

Ez Farkas tételének inkorrekt alkalmazása, ám ha az utolsó egyenlőség jobb oldalához egy nemnegativ állandót hozzáadunk, akkor Haar tételének korrekt alkalmazásáról van szó /a tételt tartalmazó cikk később németül is megjelent/.

Gale, Kuhn és Tucker 1951-ben a /D/11/ dolgozatban közölt egy hibátlan bizonyitást. Neumann összegyüjtött müveinek kiadásakor a /A/VI.8/ cikkhez Kuhn és Tucker irt egy megjegyzést, melyben éppen a fent emlitett hibát tették szóvá és rámutattak arra, hogy hogyan kell azt kijavitani. Ám Haar nevét egyik helyen sem emlitették, bizonyára Haar tételét ők sem ismerték. Vagyis: Neumann gondolatmenete az akkor már majdnem 30 éve meglévő Haar tétellel kombinálva teljes bizonyitást ad a dualitás tételre. Minthogy a dualitás-kapcsolatot Neumann fedezte fel, ugy gondoljuk, hogy a dualitás tételt nem helyes egyedül a Gale, Kuhn, Tucker szerző-hármasnak tulajdonitani, a szerzők sorából Neumann semmiképpen sem hiányozhat.

Egyébiránt a /D/15/ dolgozatunkból kitünik, hogy a tétel, legalábbis részben, Farkas Gyula nevét is viselheti, a mechanikai egyensullyal kapcsolatos vizsgálatai miatt.

A lineáris programozás /és ezáltal az operációkutatás/ Neumann egy további dolgozatában is előfordul /A/VI.5/. A dolgozat az un. hozzárendelési problémához konstruál egy hozzá ekvivalens játékot. Mai nyelvezettel ezt a következő módon foglalhatjuk össze. A hozzárendelési probléma abban áll, hogy adott egy

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \hline & & \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

/rendszerint nemnegativ elemekből alkotott/ $n \times n$ -es mátrix, meghatározandó az $1,\dots,n$ számok egy olyan $i_1,\dots, i_n$ permutációja, melyre a

$$c_{1i_1} + \dots + c_{ni_n}$$

összeg minimális az összes hasonló tipusu összegek körében. Mármost Birkhoff egy tételére hivatkozva Neumann megmutatja, hogy az alábbi lineáris programozási feladat

$$\text{minimalizálandó} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \; x_{ij}$$

feltéve, hogy

$$x_{i1} + \dots + x_{in} = 1, \quad i=1,\dots,n,$$

$$x_{1j} + \dots + x_{nj} = 1, \quad j=1,\dots,n,$$

$$x_{ij} \geqq 0 \quad \text{minden } i,j \text{ esetén,}$$

ekvivalens a hozzárendelési problémához, majd e lineáris programozási feladathoz konstruál egy ekvivalens játékot. A "játék" itt és más dolgozataiban is mint primér fogalom jelenik meg, amellyel kapcsolatban /hallgatólagosan/ egy fizikai értelemben vett lejátszásra is gondolunk.

6. A gazdasági növekedés Neumann-féle modellje

Nem sokkal a játékelmélet megalapozása és a hires minimax tétel bebizonyitása után Neumann János érdeklődése a közgazdaságtan felé fordult. Egy, a Princeton Egyetemen 1932-ben tartott szemináriumi előadásán vázolta először a később róla elnevezett növekedési modellt. Ezt azután 1938-ban publikálta egy Menger által szerkesztett szemináriumi kötetben /A/VI.3/. A modell a következőképpen foglalható össze.

Egymás utáni periódusokban azonos tipusu termékeket állitunk elő, mindig az eggyel korábbi periódus termékeinek felhasználásával és azonos tipusu folyamatok segitségével. Feltesszük, hogy a termeléshez szükséges természetes erőforrások /munka stb./ korlátlanul rendelkezésre állnak, a termelési folyamat lineáris függvényekkel irható le /az alább részletezendő módon/, továbbá a gazdasági fejlődés egy állandó arány szerint történik, ugyszintén a kamat is időtől függetlenül állandó százalékot jelent. Keresendők az egyes periódusokban előállitandó termékmennyiségek, a megfelelő árak, a kamat és a fejlődési ráta.

Jelölje n a termékek, m pedig a termelési folyamatok számát. Egy adott periódust tekintve, az i-edik folyamat a j-edik termékből felhasznált mennyiségét a_{ij}, megtermelt mennyiségét pedig b_{ij} jelöli. Az ezekből az elemekből alkotott mátrixokat A és B jelöli.

Az egyes termelési folyamatok intenzitását $x_1, \dots, x_m$, ezek vektorát $\underline{x}$, a termékek árait rendre $y_1, \dots, y_n$, ezek vektorát $\underline{y}$ fogja jelölni. Végül legyen α a gazdaság fejlődési rátája, z pedig a kamatláb $/0 < z < 100/$. Feltesszük még, hogy $a_{ij}, b_{ij} \geq 0$ és $a_{ij} + b_{ij} > 0$ minden i,j esetén. A Neumann modell a következő feladatot jelenti: keresendő olyan $\underline{x}$, $\underline{y}$ vektorpár és $\alpha > 0$, $\beta = 1 + z/100$ számpár, melyekre teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\underline{x} \geqq \underline{0}\,, \qquad \underline{y} \geqq \underline{0}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\,,$$

$$\alpha\, \underline{x}'\, A \leqq \underline{x}'\, B\,,$$

$$\beta A\, y \geqq B\, \underline{y}\,.$$

$$\underline{x}'\,(B - \alpha A)\, \underline{y} = 0,$$

$$\underline{x}'\,(\beta A - B)\, \underline{y} = 0\,.$$

A feltételekből azonnal adódik, hogy $\alpha = \beta$. Neumann dolgozata lényegében e feladat megoldhatósági kérdéseivel foglalkozik. Bebizonyitja, a Brower-féle fixpont tételre támaszkodva, hogy mindig létezik a fenti feltételeknek eleget tevő $\underline{x}$, $\underline{y}$ vektorpár és $\alpha > 0$ szám. Az utóbbi egyértelmüen adott A és B által.

A Neumann modell nagy érdeklődést és jelentős irodalmi hatást váltott ki, jóllehet világos, hogy inkább elvi jelentőségü vizsgálatról, mint a gyakorlatban alkalmazható módszertanról van szó.

7. Megjegyzések

Neumann Jánosnak e cikkben ismertetett müvei egy mélyen gondolkodó, zseniális elme alkotásai. E munkákra jellemző, hogy egy-egy a gyakorlatban vagy más tudományban fellelhető problémát tárgyalnak a matematika nyelvére leforditva és a matematika apparátusával.

Neumann azonban nem vállalkozott arra, hogy eredményeit apró pénzre váltva, azokat a köznapi gyakorlatba átültesse, sőt az általunk vizsgált eredményeit illetően ez nem is tünik közvetlenül lehetségesnek.

A játékelmélet nem nyujtott a gyakorlat számára közvetlenül és széleskörüen alkalmazható módszertant. Bár Neumann és Morgenstern sem remélte, hogy elméletük rövid időn belül konkrét felhasználást nyer, mégis ugy tünik, jelentősebb előrehaladásnak kellett volna már bekövetkeznie. Mi okozza ebben a vonatkozásban a fő problémát?

Egyfelől észre kell vennünk, hogy már a szerencsejátékok matematikai leirása is olyan bonyolult, hogy egy-egy játékról külön tudományos dolgozatot kell irni. Példa erre a /A/VI.5/ dolgozat, melyben a póker játék tárgyalása is csak egyszerüsitő feltételekkel történik. A gazdasági játékok pedig a szerencsejátékoknál sokkal bonyolultabbak. Másfelől a játékelmélet centrális döntési elve a minimax elv, ez pedig sok esetben nagyon is megkérdőjelezhető döntési elv. Végeredményben tehát a játékelmélet révén fontos módszerhez jutottunk, ám a Neumann - Morgenstern könyv bevezetőjében megfogalmazott szerep helyett a sors - a mai napig - szerényebbet itélt meg számára.

A gazdasági növekedés Neumann-féle modelljére is tehetők részben hasonló megjegyzések.

A tudomány eredményeinek gyakorlati felhasználása sok esetben igen bonyolult, áttételes és hosszan tartó folyamat. Neumann János korszakalkotó tudományos eredményeket ért el, gondolatai elevenen élnek a mai közgazdaságtanban, a gazdasági és az operációkutatási gyakorlatban. Ám eredményeinek felhasználása csak ritkán történik közvetlen, direkt formában.

NEUMANN JÁNOS ÉS A SZÁMITÓGÉP

Révész György /Budapest/

Neumann János neve a szakemberek számára teljes joggal szorosan összefonódott az elektronikus digitális számitógép fogalmával. E téren szerzett érdemeit egyáltalán nem csökkenti az a tény, hogy nem egyedül találta fel a számitógépet, hiszen az több, külön-külön is jelentős találmánynak a kombinációjaként jött létre, és kiváló mérnökök és matematikusok team-munkája kellett ahhoz, hogy az első ilyen számitógépet létrehozzák. Az ilyen team-munkánál Neumann János saját megállapitása szerint is igen nehéz kideriteni, hogy egy-egy ötlet vagy javaslat kinek a fejében született meg először. Másrészt az is nyilvánvaló, hogy a jelentős uj ötletek sem a semmiből jöttek létre, hanem az előzmények és előfutár elképzelések rendkivül gazdag hátterében. Igy Neumann Jánosra is érvényes Newton megállapitása, aki azt állitotta önmagáról, hogy azért látott kortársainál messzebbre, mert óriásoknak a vállán állott. Ez pedig egyáltalán nem volt akadálya annak, hogy azután a tudósok egész serege álljon az ő vállaira.

Nehéz lenne számba venni azoknak az óriásoknak a sorát, akik a mai számitógépek feltalálását előkészitették, de néhányat mégis meg kell emlitenünk, hiszen ezekben az "okos" gépekben az emberiség régi álmai váltak valóra.

Legismertebb számológépkészitők között olyan neveket találunk, mint Pascal és Leibniz, akik már az 1600-as években készitettek mechanikus számológépeket. A matematikusokra különösen mélyen hatottak Leibniznek azok az elgondolásai, miszerint létezik olyan univerzális módszer, amelynek segitségével minden igazság eldöntését valamiféle mechnikus számitásra lehet visszavezetni. Századunk elején Hilbert próbálkozott a matematikán belül ilyen univerzális módszer kidolgozásával, de Gődel 1930-ban bebizonyitotta, hogy ez lehetetlen. A kiszámithatóság problémájának a vizsgálatára Turing angol matematikus 1936-ban dolgozta ki a később róla elnevezett Turing-gép fogalmát. A Turing-gép egy tisztán matematikai absztrakció, mely primitivségénél fogva egyáltalán nem alkalmas gyakorlati felhasználásra. De éppen az benne az érdekes, hogy primitiv volta ellenére, ha elég sok idő áll rendelkezésre, akkor elvileg mindent ki tud számitani, ami egyáltalán kiszámitható. Különös figyelmet érdemel az un. univerzális Turing-gép konstrukciója, mely képes egy tetszőleges Turing-gépet szimulálni, ha ez utóbbinak a leirását megfelelően kódolva felvisszük a szalagjára. Mai szóhasználattal élve azt mondhatnók, hogy az univerzális Turing-gépre "beprogramozható" bármely más Turing-gép.

Az absztrakt matematikai vizsgálatok fejlődése természetesen a müszaki fejlődéssel együtt haladt előre a modern számitástechnika felé. A müszaki előfutárok között kiemelkedő helyet foglal el Babbage tanulmánya, aki

1833-ban a Jaquard-féle szövőszék mintájára felfedezte a lyukkártyavezérlés előnyeit. Az általa tervezett számitógépnek már valóságos programkönyvtára lett volna kártyákra lyukasztva. Elgondolásait az akkori technikai eszközökkel nem sikerült megvalósitani, de azok minden későbbi számitógép-konstrukcióra jelentős befolyát gyakoroltak.

A diszkrét állapotokkal jellemezhető un. digitális müködésü számológépektől csaknem teljesen függetlenül igen sok folytonos müködésü, más néven analóg számitó szerkezetet konstruáltak az idők folyamán. Ezek az analóg szerkezetek többnyire egy-egy speciális célfeladat optimális megoldására törekedtek, és a mechanikus elemeket fokozatosan felváltották bennük az elektromos áramköri elemek. A második világháboru kezdetére már lényegében megvolt minden olyan müszaki találmány, ami a nagyteljesitményü elektronikus számitógépek konstrukciójához kellett. A háboru természetesen ujabb lökést adott ezek müszaki fejlesztésének, mert mind a ballisztika, mind a repülés, illetve légelháritás, végül pedig az atombomba létrehozása rendkivül sok, igen gyorsan elvégzendő számitást igényelt. Ezért a háboru idején mind az analóg, mind pedig a digitális elvü számitóberendezések fejlesztése mindenütt felgyorsult. A háboru sujtotta európai országokhoz képest azonban a müszaki fejlesztés feltételei az Egyesült Államokban sokkal kedvezőbbek voltak.

A háboru előtt és alatt az Egyesült Államokban is több párhuzamos fejlesztés folyt, és ezek között a verseny végül is csak a háboru befejezése után dőlt el az elektronikus készülékek javára. A Bell Telephone Laboratories által kifejlesztett relés gépek, valamint a Harward egyetem és az IBM együttmüködésével Mark I,II, III néven kifejlesztett ugyancsak relés gépek még jóval a háboru befejezése után is versenyben voltak, mert sokan ugy vélték, hogy nagyobb megbizhatóságuk bőséges kárpótlást nyujt a kisebb sebességért. A Mark I 1944-ben készült el, ugyanabban az évben mint az első elektronikus számitógép, az ENIAC.

Ez utóbbi fejlesztése lényegében 1943 májusában kezdődött az amerikai hadsereg ballisztikai kutatólaboratóriuma megbizásából a Pennsylvániai Egyetem Elektromérnöki karán. Az egyetem részéről két kiváló elektromérnök John W.Mauchly és J. Presper Eckert voltak a kezdeményezők, a hadsereg részéről pedig Herman H. Goldstine vett részt kezdettől fogva a munkában. Neumann János 1944 nyarán véletlenül találkozott Goldstine-nal, s ekkor kapcsolódott be az elektronikus számitógépek fejlesztési munkálataiba. Az ENIAC fejlesztéséhez azonban annak előrehaladott volta miatt már nem sokkal járulhatott hozzá. De a fejlesztők ekkor már egy uj továbbfejlesztett változaton is gondolkoztak, s ennek az EDVAC-nak nevezett számitógépnek a koncepciójára Neumann közreműködése döntő befolyást gyakorolt.

Az ENIAC /Electronic Numerical Integrator And Computer/, bár lényegében elektronikus digitális számitógép volt, két lényeges pontban, éspedig a memoria terjedelmében és a programozás technikájában messze elmaradt a mai gépektől. Memoria helyett mindössze 20 akkumulátora volt, az adatokat lyukkártyákról olvasta be, s az eredményeket ugyancsak kártyákba lyukasztotta. A aritmetikai müveleteket elektronikusan végezte, és két tizjegyü decimális szám összeadása 200 mikroszekundumot vett igénybe. A gép kb. 18.000 elektroncsövet tartalmazott és óriási helyet foglalt el. A programokat kapcsolók segitségével, kézzel kellett beállitani, ami még a Hollerith-gépeken alkalmazott dugaszolt programozásnál is nehézkesebbé tette a programváltást. 1944 nyarán a fejlesztők döntő lépést tettek az ENIAC-nál jelentkező hiányosságok kiküszöbölésére. Először is Eckert felfedezte, hogy az un. késleltetővonalon egy visszacsatolás segitségével viszonylag olcsón lehet információt tárolni. Ezt a gondolatot Neumann tökéletesitette, s igy megoldhatóvá vált a nagykapacitásu memóriaegység tervezése. A programozás tekintetében először a Bell Laboratóriumban is alkalmazott, s lényegében már Babbage által felfedezett lyukszalagvezérlést gondolták megvalósitani. Ettől az elképzeléstől a memóriában tárolt programhoz vezető döntő lépést már Neumann közremüködésével tették meg. Neumann ugyanakkor az uj gép logikai tervezését teljesen uj módszerre alapozta felhasználva McCullogh és Pitts jelölésrendszerét, melyet azok az idegrendszer tanulmányozására dolgoztak ki. Az EDVAC /Electronic Delay Storage Automatic Computer/ tervezésében jelentős esemény következett be 1945 közepén, amikor Neumann János elkészitette az addigi eredmények szintézisét tartalmazó 101 oldalas jelentését. Ez a "First Draft" néven később szélesebb körben ismertté vált jelentés már rendkivül világosan kifejti a modern számitógépek müködési elveit és funkcionális felépitését. Az általa kifejtett elveken épülnek a mai napig az összes elektronikus számitógépek.

Az ENIAC gép 1946 februárjában történt hivatalos átadása után a fejlesztő gárda felbomlott. /Az EDVAC-ot a Pennsylvaniai egyetemen egy uj fejlesztő csoport fejezte be 1950-ben./ Neumann Jánosnak ugyanakkor a princentoni Institute for Advanced Studies elnevezésü kutatóintézetben, mely addig tisztán elméleti kutatásokkal foglalkozott, sikerült megszerveznie egy fejlesztő-csoportot, mely célul tüzte ki egy uj, nagyobb teljesitményü számitógép kifejlesztését. Ehhez az anyagi fedezetet a hadsereggel, a tengerészeti hivatallal és az Atomenergia Bizottsággal kötött szerződések biztositották. A fejlesztési munkák 1946-ban kezdődtek, s a gépet, melyet legtöbben egyszerüen von Neumann gépnek neveztek, 1952-ben helyezték üzembe. Ez a Neumann irányitása alatt készült gép már kettes számrendszerrel dolgozott, az utasitásai egycimüek voltak és a sebesség növelésére párhuzamos müködésü egységeket használt szemben az EDVAC-nál alkalmazott soros müködéssel.

Neumann János és munkatársai emellett igen fontos programozáselméleti vizsgálatokat folytattak. Neumann már 1945-ben kidolgozott egy rendező rutint az EDVAC-ra. 1947-ben Planning and Coding cimen Goldstine-nel együtt publikált dolgozatukban már részletesen kifejtik a programozás módszertanával kapcsolatos eredményeiket. Ebben világosan megofgalmazzák az önmagát módositani képes program logikai jelentőségét és az ilyen dinamikus, időben változó algoritmusok tervezésének a nehézségeit. Az algoritmus fogalmát a tárolt programozás megjelenése előtt mindig valamilyen utasitásoknak egy előre rögzitett csoportjával azonositották. Most az algoritmus végrehajtása közben nemcsak az adatokon végezhetünk müveleteket, hanem az algoritmust magát is módosithatjuk, s ezáltal az algoritmus lefutásának előre látása sokkal nehezebbé válik. Ma ugy tünik, hogy az önmódositás lehetőségével nagyon óvatosan kell bánnunk, mert a program áttekinthetősége, azaz jól strukturálhatósága rendkivül fontos a programhibák kiküszöbölésében.

Neumannak a számitógépekhez való kapcsolatában is megmutatkozott rendkivüli sokoldalusága. Eredetileg azért fordult figyelme e gépek felé, mert ezektől remélte egy sor igen fontos numerikus problémának a megoldását. Már a harmincas évek közepén foglalkozott a hidrodinamika problémáival. Itt olyan nem-lineáris parciális differenciálegyenletek megoldására van szükség, melyeket analitikusan csak néhány igen egyszerü esetre sikerült megoldani. A bonyolultabb esetekben csak numerikus közelitő számitások segitségével kaphatunk eredményt, de ehhez rendkivül sok müveletet kell viszonylag nagy pontossággal végrehajtani. E hidrodinamikai egyenletek megoldása különösen fontossá vált az atombomba létrehozásával kapcsolatban, ami a háboru idején Manhattan-terv fedőnév alatt folyt Los Alamosban.

Neumann röviddel a terv beindulása után állandó tanácsadóként kapcsolódott be ebbe a munkába. Az egyik igen fontos probléma itt az volt, hogy olyan gömb-alakban terjedő lökéshullámot hozzanak létre hagyományos robbanóanyag segitségével, mely az atombomba belsejében a szubkritikus tömegü hasadóanyag-részeket hirtelen nagy erővel egymáshoz préseli, s ezáltal azok a kritikus tömeget elérve felrobbannak. De az atombomba begyujtásának ezt a módszerét csak ugy lehet alkalmazni, ha sikerül valóban egyenletes gömb-hullámot létrehozni, mely egyszerre minden oldalról egyforma erővel préseli össze a nukleáris robbanóanyagot. A lökéshullámokkal kapcsolatos számitások Neumann javaslatára az elsők között szerepeltek az ENIAC géppel végzett számitások során.

Mihelyt azonban Neumann mint felhasználó kapcsolatba kerül a számitógép-tervezőkkel, rögtön felismeri a gép rendkivüli jelentőségét, és nagy lendülettel kapcsolódik be annak továbbfejlesztésébe, hamarosan pedig az akkori idők legjobb gépének a főkonstruktőreként tevékenykedik. Az ő irányitásával tervezett gép, a fentebb emlitett von Neumann gép lett a későbbi számitógépek prototipusa. Ma ugy tünik, hogy a Neumann-tipusu számitógépek korszaka a végéhez közeledik, és az álala lefektetett alapelvek módositására van szükség. Ezek a First Draft-ban már az EDVAC-nál kifejtett alapelvek ugyanis a számitógépet öt funcionális egységre tagolják, ugymint

- aritmetikai egység,
- vezérlő egység,

- memória egység,
- beviteli egység,
- kiviteli egység.

Ennek az öt fő résznek az együttműködésében általában a be-, illetve kiviteli egységek képezték a szük keresztmetszetet. A csatorna rendszerek létrejöttével és a periférikus egységek megsokszorozásával viszont ez a szük keresztmetszet megszüntethető. Az operativ memória elérési idejének a csökkenése, és főleg tárolókapapcitásának megnövekedése egyre inkább a feldolgozó /vezérlő és müveletvégző/ egység felé tolja el a szük keresztmetszet helyét. A teljes memóriának ugyanis mindig csak egy kis része aktiv, egy-egy müveletben általában egy-két adat /néhány byte/ vesz részt, mig a memóriában tárolt nagytömegü információ tulnyomó része passziv. Ezen csak ugy lehet segiteni, hogy a feldolgozó egységet is megsokszorozzuk, tehát ha a párhuzamos müködés elvét az utasitásokra is kiterjesztjük.

Ez bizonyos értelemben a programozást is forradalmasitja, mert a jelenlegi programozási módszerek az utasitások egyenkénti, soros feldolgozására épülnek. A párhuzamosság igénye, és az abból eredő szinkronizációs problémák Neumann idejében még nem jelentkeztek. Érdekes azonban megemliteni, hogy Neumann a párhuzamos müködést a müveletvégző egységen belül a sebesség növelése céljából nagyon lényegesnek tekintette. Másrészt az idegrendszer müködésének modellezésére kidolgozott sejt-automaták koncepciójában a párhuzamos müködést alapvetőnek tekintette.

A számitógépek teljesitményének a növekedése természetszerüleg ujabb és ujabb problémákat vet fel. Mig kezdetben az egyes elemi müveletek egymásutánjainak automatikus vezérlése volt a fő feladat, később már egy-egy teljes program is olyan gyorsan futott le, hogy a programok egymásutánjának automatikus vezérlését is meg kellett oldani, s ez az operációs rendszerek kidolgozásához vezetett. A ma használatos hardware-software együttesek bonyolultsága viszont már olyan fokot ért el, hogy minden továbblépés ezen az uton rendkivül nehézzé vált, s időszerünek látszik az eddigi módszerek alapos felülvizsgálata.

A továbbfejlődés utja egyelőre még nagyon bizonylatalan. A digitális technika a matematikai logikára épül, mely diszkrét, kombinatorikus jellegénél fogva Neumann szerint a matematika legnehezebb területéhez tartozik, s ezért jó volna, ha a matematika folytonos jellegü eszközeit is fel tudnánk használni, melyek a matematika eddigi alkalmazásaiban a legeredményesebbeknek bizonyultak. A folytonosságra épülő módszerek széleskörü alkalmazása a számitógépek konstrukciójában ma is csak óhajnak számit. A kombinatorikus jelleg kétségtelenül dominál mind a hardware-tervezés, mind a programtervezés vonalán. Neumann nyilván tisztában volt azzal, hogy milyen nehéz a diszkrét, kétértékü logikát az analizissel összehozni. Hogy ez az óhaja mégsem volt egészen alaptalan, azt talán azok a modellelméleti eredmények támasztják alá, melyek a kombinatorikus logika és bizonyos folytonos hálók közötti összefüggésekre derítettek fényt. Az első ilyen modellt Dana Scott találta

1969-ben miközben az ilyen modellek létezését akarta cáfolni. Itt persze a folytonosságot máshogyan kell értelmezni, mint a klasszikus analizisben, de a lényeg az, hogy olyan függvényekre kell szoritkoznunk, amelyeknek a viselkedése valamiféle szabályosságot mutat. Az algoritmikusan kiszámitható függvényeknek ebben az értelemben mind folytonosaknak kell lenniök.

Neumann a számitógépek konstrukciójának egy másik igen fontos kérdését, a megbizhatóságot is behatóan tanulmányozta. Elgondolásának lényege egyszerüen az, hogy a megbizhatatlanul müködő alkatelemek számát megsokszorozza, és a helyes eredményt szavazásos alapon dönti el. Ezáltal a megbizhatóságot nagymértékben növelhetjük, de gépünk egyre drágább lesz. Nagyon erősen foglalkoztatta emellett az a kérdés, hogy az idegrendszer milyen módon küszöböli ki a hibákat és, hogy az agymüködés mennyiben különbözik az emberek által tervezett számitógépek müködésétől. Erről szóló könyvét már betegen irta 1955/56-ban, mely magyarul is megjelent "A számológép és az agy" cimen 1972-ben, a Gondolat Kiadónál.

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY
SCHOOL OF MATHEMATICS
PRINCETON, NEW JERSEY

ENIAC project started May 1943 (up to, say, ~~[illegible]~~ Nov. 1, 1945: $2\frac{1}{2}$ years).

Expenditures: Up to Oct. 1.: \$375,000 (war time prices: \$1.25 p/h for wiremen, +50% overtime)
Installing in Aberdeen: < \$100,000 (Perhaps 2/3 in peace)

Staff:

Mauchly	\$5,500
Eckert	\$5,000
Burks	\$4,000
6 more engineers averaging \$3,333	\$20,000
	\$34,500
Goldstine	—
Brainerd	\$3,000

Shop, manufacturing probably 2-3 times over peace.

~~[illegible]~~ For the EDVAC:
1 Machinist, some equipment (drillpresses, 1 lathe, 1 bandsaw, ~ \$25,000 for shop, mechanical, electrical and electronic tools).
Some low grade helpers (1 or 2).
8-10 wiremen.
(Men now up to \$100/week, girls \$60/week,
\$5000/y \$3000/y
perhaps 1/2 in peace.)
(ENIAC was twice this.)

EDVAC (in war!) 2 years, \$200,000.

Running of the device:

Power: 1 cent/KWh. Punchcard: \$1/thousand. Magnetic wire: \$4/[illegible] ft
Magnetic tape: \$1/5[illegible] ft

Personnel: 1 good mathematician, 1 more mathematician, 3 girls (low) | [illegible] engineers, 1 serviceman | accidental help

\$15,000/y   \$10,000/y

Power: $\underset{d/y}{365} \cdot \underset{h/d}{12} \cdot \underset{[illegible]}{30} = \underset{KWh}{130{,}000} = \$1{,}300/y$

Cards: $5000/d \cdot$ ~~[illegible]~~ $1{,}800{,}000/y = \$1{,}800/y$

[illegible]: [illegible] 30,000/y

Neumann feljegyzései az ENIAC és az EDVAC üzemeltetési költségeivel kapcsolatban.

/ 1945. augusztus 24. /

1.) August 22, 1945.

Equipment:
Tools, Machinery, Oscilloscopes, etc. } $25,000
(Bandsaw, Drillpress)

[illegible]

Floorspace used in manufacturing the ENIAC:

30'×50' + 20'×20' + 20'×60' + Shop {10'×20'} = 3300 □'
ENIAC Room — Drafting — Wiring, etc.

First used for Wiring — Then

Estimated for the EDVAC:

2/3 { 30×50 + 20'×20' + 20'×60' + Shop 10'×20' = 3300 □' } 2200 □' Safety: 3300 □'
(3) — Drafting — Wiring, etc.

Equipment	25,000
Supplies	7,000
~~Equipment~~	~~[illegible]~~
5 magnetic (sensing and) recording à $1000	$5,000
2500 tubes à $5	$12,500

Building: $10,000–[illegible]
Alternative: Build for $5 □'
Rent $1/□'

IBM typewriters, etc.	$1,000
Machine: 5 magnetic recorder (and sensing) à $1000	$5,000
2500 tubes à $5	$12,500
	$18,500
	$28,000
	$25,000

Salaries:
Staff $35,000
Labor $25,000
$60,000
Materials $18,000
$78,000

Safety: ~~$[illegible]~~ + ca. 50%
equipment: 10+3+3=16, + ca. 50% — $53,000
Per year: < $18,000

Materials: 1st year $10,000; 2nd " 3,000; 3rd " 3,000 } Per year < $6,000

$24,000

August 24, 1945.

Building:

Machine Room $20' \times 20'$ + Working Space $20' \times 60'$ + Shop $20' \times 20'$ = 2,000 □'

General space = 500 □'

2,500 □'

Building (Expensive, Landscaped) \$25-35,000

Producing and Running — 1 year: \$10,000

Staff: 8 engineers average \$4,000 — \$32,000

12 wiremen average \$2,000 — \$24,000

1 Machinist & 1 Assistant, \$4,000 & \$3,000 (average sal.) — \$7,000

supplies \$63,000

Producing

Supplies: Initial: Resist. \$3,000

Tubes \$3,000

Cap. \$1,000

Transf. \$1,000

Misc. \$2,000

\$10,000

Replacements:

40% each year: \$4,000

Average:

$1/3 \, [\text{illegible}] (10 + 2 \times 4) \times$ \$1,000 = \$6,000

Producing

Laboratory: 3 oscilloscopes \$3,000

Various oscillators, Pulse Generators, etc. } \$1,000

Various Meters \$1,000

Various Standards (R, C, L-meters) } \$1,000

Miscellaneous \$1,000 [illegible]

1 year: \$2,300

Shop: [illegible] :

2 Lathes	$2,500	
1 Grinder	$2,500	
1 Shaper	$1,500	
2 Drillpresses	$ 500	
1 Do-all	$ 500	
1 Electric Saw, Brake, Arbor Press	$ 500	
Hand tools (Cal. of Shops)	$ 1,500	1 year: $3,000
	$9,000	

Construction:

Sheet metalwork	$ 2,500	(ENIAC: $15,000) !?!
250 tanks $50 each	$12,500	
Tube circuits (2000 at $5 each)	$ 10,000	
Magnetic recorders (5 at $500 each)	$ 2,500	(Commercial: $1,000, with microphone, amplifier [illegible])
IBM typewriters (5 at $300 each)	$ 1,500	
Oscilloscope mechanism (for tank inspection)	$ 1,000	
Power Supply	$ 1,000	(ENIAC: $10,000)
Ventilating System	$ 1,000	[(ENIAC: $ 8,500) (10 blowers: $400, tinwork: $ 1200)]
Test Equipment (Internal + supplementary external)	$ 2,000	1 year: $11,300
	$34,000	

1 year (for 2 years):

Building	$10,000
Staff	63
Supplies	6
Laboratory	2,5
Shop	3
Construction	11,3
	$95,600

NEUMANN JÁNOS A "SZÁMITÁSTECHNIKUS"

/MUNKÁSSÁGA A NUMERIKUS MÓDSZEREK TERÜLETÉN/

Szelezsán János /Budapest/

Társaságunk nevében azért szerepel Neumann János neve, mert őt tekintjük a számitógépek "atyjának" az első "számitástechnikusnak" és mert hazánkban született.

Bizonyára nem nagyot tévedünk, ha azt mondjuk, hogy Társaságunk tagjainak többsége nem tudja, hogy Neumann János korunk legnagyobb matematikusainak egyike volt. Ha a teljes életművet vizsgáljuk, akkor némi tulzással megkockáztathatjuk azt az állitást is, hogy a számitógép Neumann János munkásságának egy "mellékterméke" volt "csupán". Igaz, hogy ennek a hatása jóval nagyobb lett mint amilyennek talán maga is gondolta volna.

Nagy matematikus volt, és még nagyobb azért, mert valószinüleg az utolsó nagy matematikai polihisztorként tartja majd számon a tudománytörténet. A matematika nagyobb ágai között talán egy sincs amit ne müvelt volna.

Sután hangzanak egymás után sorban a "nagy", "legnagyobb" jelzők, mégis zárjuk le a felsorolást azzal, hogy korának legnagyobb alkalmazó-matematikusa is volt.

Ebben a róla szóló kis kiadványban elsősorban mint a számitástechnika, a számitástudomány uttörőjéről szólunk.

Hat kötetbe összegyüjtött dolgozatait, tanulmányait lehetetlen lenne egy ilyen könyvecskében ismertetni. Ez ráadásul /bármennyire is kitüntető lenne/ nem is lehet a Számitógéptudományi Társaság feladata.

E cikk irójának az a feladat jutott, hogy Neumann Jánosnak a numerikus módszerek /numerikus matematika/ területén végzett munkásságát ismertesse. Egyébként az első számitógépek idején számitástechnika=numerikus módszer+/számitó/gép egyenlőség volt érvényes. Könnyen el lehet jutni olyan következtetéshez, hogy a matematika alkalmazása során előjött numerikus módszerek tették szükségessé olyan gépek létrehozását, amelyekkel a számitásokat automatizálni lehet. Egy ilyen eszmefuttatással az is világossá válik, miért lett éppen egy, a numerikus számitásokkal is foglalkozó alkalmazó-matematikus a "számitógépek atyja". Bizonyára azoknak is igazuk van, akik azt mondják, kár, hogy a mai - főleg nem matematikai feladatok megoldására használatos - számitógépek a "matematikai gépek"-ből fejlődtek ki.

A számitógépek megjelenése a numerikus módszerek /numerikus analizis/ területén uj problémákat vetett fel. Neumann János az elsők között volt, aki ezeket észrevette és több tekintetben uj irányt adott a numerikus analizisnek.

Ugy véljük, hogy legjobb áttekintést akkor kaphat az olvasó, ha a dolgozatokat külön-külön ismertetjük.

Nagyméretü lineáris rendszerek megoldása

Ezt a dolgozatot társszerzőkkel V. Bargmann-nal és D. Montgomery-vel irta Neumann. 1946-ban egy - nyomtatásban 57 oldalas - beszámolójelentésként a Bureau of Ordnance részére készült.

A dolgozat 3 fejezetből áll. Az első fejezetben a szerzők összefoglalják a lineáris egyenletrendszerek, illetve a mátrix inverzió megoldásának ismert módszereit /eliminációs módszer, mátrix-particionálási módszer, a determinánsok módszere/. A második fejezetben mátrixok maximális és minimális saját értékeinek elméleti meghatározását elemzik. A harmadik fejezetben mátrixok legnagyobb illetve legkisebb sajátértékeinek kiszámitására, valamint ezeknek a mátrix inverz meghatározásában történő felhasználására adnak módszereket.

Valószinüleg ez az első olyan munka a numerikus módszerek területén, amely "számitástechnikai" indittatásu. Azokat a problémákat veti fel, amelyek a számitógépek korszakának numerikus matematikájában azóta is a nagy problémát jelentik: nevezetesen a müveletszámok becslése és a módszerek stabilitása.

Mai szemmel nézve érdekes a cikk néhány mondata. A szerzők nagy egyenletrendszernek tekintik a 20, 50, 100 ismeretlent tartalmazókat, és azt mondják, hogy ezeket csak "nagy sebességü számológépekkel" /high speed computing machine/ lehet megoldani. Gondoljunk csak azokra a számitógépekre, amelyeket akkor neveztek nagy sebességüeknek! /50 müvelet másodpercenként!/

Furcsa paradoxon, hogy a "nagy" sebesség fogalmának elég jelentős megváltozása a számitógépeket illetően az eltelt közel 35 év alatt nem változtatta meg lényegesen a numerikus matematika több területén a "nagy" méret és a "korszerü módszer" fogalmát. Éppen ebben a cikkben mutatják meg a szerzők, hogy lineáris egyenletrendszerek eliminációs módszerrel történő megoldása esetén a müveletek száma szorzásokra vetitve $n^3/3$ szorzás. A mai nagy számitógépek sebessége mintegy 50 000-szer nagyobb, mint azok, amelyeken Neumann és munkatársai dolgoztak. 50 000-szer nagyobb lineáris egyenletrendszer megoldásához eliminációs rendszerrel a mai legnagyobb számitógépeken több mint 500 évre lenne szükség /a háttérmemória és a központi tár közötti ügyes munkamegosztás segitségével/. A cikk megirása idején egy 20 ismeretlenes egyenletrendszer megoldása az akkori nagy sebességü számitógépen egy-két órát vett igénybe. Ha ehhez még azt is hozzátesszük, hogy az eliminációs módszerhez képest nincsen alapjaiban uj /nem iterációs/ módszerünk a lineáris egyenletrendszerek megoldására, akkor világossá válik, hogy a Neumann János és szerzőtársai által felvetett müveletszám elemzés többek között éppen lineáris egyenletrendszereknél még ma is fontos feladat.

Külön érdekessége ennek a dolgozatnak, hogy a számitógépek megjelenésével különösen fontossá váló problémát is felveti /valószinüleg ennyire "számitástechnikus módon" elsőként/ nevezetesen a megoldási módszerek stabilitásának problémakörét.

A szerzők egy numerikus eljárást stabilnak neveznek, ha a lépésenként fellépő kerekitési hibák nem akkumulálódnak tulságosan erősen. Nagyméretü lineáris egyenletrendszereknél ezek a hibák olyan mértékben halmozódhatnak, hogy a megoldási módszer használhatatlanná válik.

Egy módszer instabilitása, vagy az instabilitás mértékéről szóló információ hiánya különösen azért vetődött fel a számitógépekkel kapcsolatban, mert a kerekitési hibák hatásának egyik kiküszöbölési módja az adatok számjegyei számának a növelése, vagyis az, hogy jóval több számjegyü számokkal végezzük el a müveleteket, mint amilyen pontosan az eredményt kapni akarjuk. Rögzitett hosszusági szavakkal dolgozó számitógépekben csak adott számu számjegyből álló számokkal dolgozhatunk. Két vagy három szóból álló számokkal speciális program segitségével lehetett müveleteket végezni, ami jelentősen meghosszabitotta a gépidőt.
Az első számitógépeken a stabilitással kapcsolatban gondot okozott a gépek fixpontos aritmetikája: a feladatokat /a megoldási módszereket/ ugy kellett transzformálni, hogy minden előforduló mennyiség egynél kisebb legyen. A számitásban szereplő mennyiségek elosz-

tása olyan faktorral, hogy a legnagyobb szám is kisebb legyen egynél a kis számokat könnyen "nullává" tette. A stabilitás tekintetében ez sulyos problémát jelentett.

A numerikus módszerek jóságát illetően tehát fontos ismérv, hogy hogyan viszi tovább lépésről lépésre a kerekitési hibákat. A numerikus eljárásokat ebben a tekintetben szigoruan elemezni kell. Nagyon keveset tudunk erről és nehéz problémának tünik pontos becsléseket kapni, - mondják a szerzők.

A szerzők először az eliminációs módszereket elemezték ebből a szempontból. A hiba továbbhordozása tekintetében ezek nagyon rossz eljárások, mert minden lépésben minden müvelet tovább viszi az előző hibát. Ráadásul minden lépésben osztást is végzünk, és az osztók gyakran igen kis számok. Ez erősen növeli a kerekitési hibákat. Végül rontja a stabilitást az is, hogy az eljárás végén x_n-ből számitjuk ki a többi ismeretlent.

A szerzők arra a következtetésekre jutnak, hogy az iterációs módszerek lényegesen kedvezőbben viselkednek a kerekitési hibák szempontjából, tehát stabilabbak.

A dolgozat további /terjedelmét tekintve nagyobb/ részében éppen ezért az iterációval foglalkoznak a szerzők. Először semidefinit mátrix legnagyobb és legkisebb sajátértékének kiszámitására adnak módszert ugy, hogy közben becsléseket adnak a kerekitési hibákra, illetve ezek felhalmozódására, majd a sajátértékek felhasználásával Hotelling iterációs mátrix-invertálási módszerét módositják. Ez utóbbiban is a vizsgálódás fő célja a kerekitési hibák elemzése és annak megadása, hogy hány tizedes jeggyel kell a számitásokat elvégezni adott pontosság eléréséhez.

Nagyméretü mátrixok numerikus invertálása

Ezt a dolgozatot H.H Goldsteinnel együtt irta Neumann János. 1947-ben jelent meg az American Mathematical Society Bulletin c. folyóiratban. Terjedelme és tartalma miatt is kisebb könyvnek tekinthető.

Mint az előzőekben referált dolgozatban itt is nem a mátrix-inverziós módszer a lényeges, bár a terjedelmet tekintve a cikk nagyobb részét ez teszi ki. A szerzők is megemlitik, hogy a mátrix-inverzió voltaképpen csak példa azoknak a problémáknak a bemutatására, amelyek azon lehetőség miatt jöttek elő, hogy számitógépekkel nagy méretü feladatok is megoldhatók. A nagy méret mellett a számitógépek fixpontos aritmetikája valamint a rögzitett és eléggé szükre szabott számjegyszám is felvetette a dolgozatban elemzett gondokat.

A dolgozat első része tulmutat a numerikus matematikán, voltaképpen az alkalmazott matematika nagy alapkérdését elemzik a szerzők: a valóságos világ valamely jelenségének leirására szolgáló matematikai modell megoldása /a numerikus eredmény/ a többféle tipusu hiba miatt milyen messzire kerülhet a jelenség tényleges mérőszámaitól.

A szerzők négy hibafajtát különböztetnek meg.

Az egyik hiba abból adódik, hogy az objektum matematikai leirása idealizálást, egyszerüsitéseket és elhanyagolásokat tartalmaz. /Nevezzük ezt A tipusu hibának/. Ezzel a hiba tipussal általában a matematika foglalkozik.

Hibát okoz az is, hogy a matematikai modellben szereplő paraméterek közül egyeseknek az értékét megfigyelésekből, kisérletekből határozzuk meg. Ez a végeredményben nagy hibát okozhat. /B tipusu hiba./ Ez a probléma a matematikai stabilitás körébe tartozik. /Ez az elmélet azt vizsgálja, hogy a feladat megoldása folytonos függvénye-e a paramétereknek./

A harmadik tipusu hiba abból ered, hogy a matematikai formula általában un. transzcendes müveleteket is tartalmaz /szerepelhet benne pl. a sin, log, exp függvény/.
A numerikus számitások közben ezeket a müveleteket elemi müveletekkel helyettesitjük /olyan aritmetikai müveletekkel, amelyeket a számitógép végre tud hajtani/. Szerepelhetnek a matematikai modellben implicit definiciók is /pl. egyenlet gyöke, sajátérték stb./. Ezeket is véges számu elemi müvelettel helyettesitjük. Ebbe a hiba fajtába sorolható a konvergens fo-

lyamatok véges számu lépéssel történő helyettesitése is. A megoldásban ezek mind hibát jelentenek /C tipusu hiba/. Ezeknek a hibáknak a vizsgálata az approximációelméletnek a tárgya.

Végül a negyedik fajta hiba abból adódik, hogy sem kézzel, sem számitógéppel nem tudjuk az elemi müveleteket pontosan elvégezni, mivel csak rögzitett számu számjegyet kezelünk a müveletekben. Jól látszik ez pl. szorzásnál: két n jegyből álló szám szorzata 2n számjegyből is állhat. Rögzitett számjeggyel való számitásokban n jegy "elveszik", kerekitünk.

Szorzásnál tehát az xy tényleges szorzat helyett egy $\overline{xy}$ pszeudoszorzat keletkezik ugy hogy $xy=xy+\varepsilon$, ahol ε a kerekitési hiba /D tipusu hiba/.
A szerzők a numerikus módszerek szempontjából különösen fontos utóbbi hibával foglalkoznak.

A dolgozaton végigvonul a számitógépes szemlélet. A szerzők több helyen is kiemelik, hogy a kerekitési hibák elemzése főleg a számitógépes feldolgozásoknál elengedhetetlen, hiszen ezeknél van lehetőség "hosszu számitásokat" végezni.

Mai szemmel nézve érdekes a "hosszu számitáshoz" tartozó lábjegyzet.
Ebben a szerzők a következőket irják: "A teljesen automatizált elektronikus számológépek /ekkor még nem computer hanem "fully automatic electronic computing machine"/

amelyek két valós számot /teljesen digitális ábrázolásban/ 10^{-4} - 10^{-3} másodperc alatt szoroznak össze, minden valószinüség szerint a nem tulságosan távoli jövőben használatba jönnek. Az olyan feladatok, amelyek megoldása 2-20 órát vesz igénybe, ezeken a gépeken tipusfeladatoknak tekinthetők. Átlagszámokat véve... egy hat órás feladat 10^7 szorzást jelent."

A számitás folyamán fellépő kerekitési hibák nem nagyok, de egy hosszu számitási folyamatban igen nagy számban fordulnak elő. E kerekitési hibákat a digitális számitási folyamat "belső zajának" nevezik a szerzők.

A szerzők azért választják éppen a mátrix inverziót, mert a kerekitéssel kapcsolatos probléma itt igen nagy /mig a többi hibafajta elhanyagolható/. Maga a feladat "elemi" de igen nagy számu elemi müvelet szerepel benne.

A dolgozat második fejezetében a szerzők kialakitják a kerekitési hibák algebráját /un. pszeudó-müveletek bevezetésével/ és a valószinüségszámitás segitségével becsléseket adnak a szorzásnál és az osztásnál keletkező kerekitési hibákra.

A harmadik fejezetben szép összefoglalást adnak a mátrix-algebráról, majd megvizsgálják, hogy a kerekitési hibák hogyan akkumulálódnak az egyes mátrix-müveleteknél. /Un. pszeudó-operációkat definiálnak a mátrixokra./

A negyedik fejezetben az eliminációs módszer rövid összefoglalása és speciális alakba való átirása, majd az ötödik fejezetben ezeknek definit mátrixokra való leszükitése szerepel.

A hatodik fejezetben - a hosszu előkészités után - rátérnek a szerzők az általuk kitüzött fő probléma megoldására: un. pszeudó-müveletes mátrix inverziós eljárást dolgoznak ki az eliminációs módszer alapján.

A hetedik fejezetben az eredmények elemzése és kiértékelése történik meg.

A szerzők megadják az eljárásban szereplő szorzások és osztások számát. Annak érzékeltetésére, hogy a kerekitések mennyire felhalmozódhatnak érdemes megjegyezni, hogy ha a mátrix rendje 150 akkor kb. 3500 000 szorzást kell elvégezni.

Ez a dolgozat voltaképpen az első része egy két részből álló munkának. A második rész 3 évvel később 1950-ben jelenik meg, ugyanolyan cimmel, mint az első /II-es számmal/. A második részben a valószinüségszámitás felhasználásával elemzik az első rész eredményeit.

<u>A Jacobi módszer valós szimmetrikus mátrixokra</u>

Ez a dolgozat H.H. Goldstein F.J. Murry és J. Neumann eredményeit tartalmazza, de mint a lábjegyzetből kiderül publikálásakor Neumann János már nem élt. A cikk

1959-ben a Journal of Association for Computing Machinery c. folyóiratban jelent meg.

A dolgozat első részében a szerzők megmutatják, hogy még az 1959-ben müködő számitógépek birtokában is mennyire irreális mátrixok sajátértékeinek a karakterisztikus polinom segitségével történő kiszámitása /pl. a Reiersol módszerben a szorzások számának nagyságrendje 2^n ahol n a mátrix rendje/. Elemzik az un. szériális módszereket is /azokat amelyek egymás után sorban adják meg a sajátértékeket/. Kifejtik, hogy ezeknél a kerekitési hibák olyan nagyok, hogy n=100 esetén 20 jegyü számokkal kell számolni, ha λ_1-re 10^{-5} pontosságot akarunk elérni, és λ_1-ből a többi sajátértékre egymás után erősen halmozódnak. Ezek a módszerek nagyon instabilak és nem is könnyen programozhatók számitógépre mert közbülső megfontolások szükségesek. Éppen ezért a szerzők más módszert, mégpedig egy iterációs-rotációs eljárást javasolnak.

A módszer előkészitése céljából elemzik az uniter mátrixok tulajdonságait valamint szimmetrikus mátrixoknak uniter mátrixokkal történő előállitását. Végül a kerekitési hibákat figyelembe vevő pszeudó-müveletes eljárás bevezetésével megadják a sajátértékek kiszámitására jól alkalmazható, számitógépekre jól programozható Jacobi féle iterációs eljárást. A dolgozat végén müveletszám becsléseket is adnak a szerzők.

Egy kétdimenziós hidrodinamikai probléma numerikus megoldása

A dolgozatnak öt szerzője van, Neumann János halála után 1959-ben jelent meg a Mathematical Tables and Other Aids to Computation c. folyóiratban. Mint a bevezetésből is kitünik a szerzők a dolgozatban a Maniac I számitógépen differenciálegyenletekkel végzett számítások eredményéről számolnak be. A differenciaegyenletekkel összenyomhatatlan folyadék viselkedését leiró elsőrendü differenciálegyenlet-rendszert approximáltak. Magát az approximációt Neumann János végezte el és egy iterációs módszert is adott az egyenletrendszer megoldására. Ezeket a dolgozathoz csatolt két függelékben közlik a szerzők /Neumann által nem publikálásra szánt, kézirásos anyagként/. Az első függeléknek érdekessége, hogy a differenciálegyenleteknek differenciaegyenletekké történő átirását szinte számitógépes program alakjában irja le Neumann János.

Parabolikus tipusu parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása /társszerző: R.D. Richtmyer/

A dolgozat 1947-ben készült. A szerzők parabolikus differenciálegyenletek numerikus megoldására adnak módszert mindkét változóban lépésenkénti integrálást végző eljárás segitségével. A módszer fő jellemzője, hogy a differenciálegyenletek differenciaegyenletekké történő átirásakor keletkező instabilitások elkerülésére speciális fogásokat alkalmaznak a szerzők.

Beszámolójelentés áramlási problémák numerikus számitásairól /I,II/

Ez a munka nyomtatásban csak Neumann János Munkáinak Gyüjteményében jelent meg. /A Standard Oil Development Company számára készült 1948. augusztusában./ A nyomtatásban közel 100 oldalas tanulmánnyal kapcsolatban két érdekességet emlitünk meg.

Az egyik a Gyüjtemények szerkesztőjének A.H. Taubnak a megjegyzése.

Az irodalomban gyakran találkozhatunk hivatkozást a "stabilitás-elemzés Neumann-féle módszerére". Neumann János sohasem publikált olyan általános módszert, amelylyel hiperbolikus és parabolikus tipusu parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásának stabilitása elemezhető, habár ő maga alkalmazta ezeket és számos előadásban vizsgálta milyen stabilitási kritériumok adhatók olyan differenciaegyenletekre, amelyekkel parciális differenciálegyenletek approximálhatók /lineáris ki perturbációk és Fourier analizis segitségével/. Magát a módszert R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy dolgozta ki speciális esetre, de Neumann bonyolultabb rendszerekre alkalmazta. Érdekes, hogy amig az alapmódszert a szerzők szigoruan bizonyitották, addig Neumann módszere /mint ő maga is hangsulyozta/ heurisztikus volt. Sok gyakorlati esetben alkalmazta és mint Werner Leuterthez irt levelében mondja "...sohasem vezetett hibás eredményre". Később Neumann hozzájárult, hogy G.C O' Brien, M.A. Hyman, S. Kaplan egyik publikációjukba belefoglalják ezt a heurisztikus technikát a stabilitások elemzésére.

A Jelentést a szerkesztő azért vette bele a Gyüjteményekbe, mert jó példája annak, hogyan alkalmazta Neumann János a stabilitási módszerét.

A másik érdekesség a Jelentés első része /Part 1, két nyomtatott oldal/ és utolsó négy oldala. Mindkét rész egy főkönyvelőnek is dicséretére válna.

Lássunk néhány mondatot az első részből. /Ennek cime: Általános megjegyzések a számológépekkel kapcsolatban./

"Megbeszéléseket folytattam az IBM munkatársaival New Yorkban /590 Madison Avenue/ a SSEC /Self-Sequencing Electronic Computer = önmüködő elektronikus számitógép/ ügyében.
Ugy tünik, hogy ez a gép ebben ez esetben néhány hétre bérelhető. Az ára előreláthatólag 300-400 $ egy ténylegesen felhasznált órára. Ezt az árat illetően az alábbi mondható:

A gép két 14 jegyü decimális számot 20 msec alatt szoroz össze. Ezzel párhuzamosan 20 msec szükséges egy gépi utasitás előhozásához. Ugy gondolom, hogy egy szorzási müvelet adminisztrálásához 3-4 utasitás szükséges. Igy tehát célszerünek látszik egy szorzásra 70 msec-ot vagy ellenőrzéssel együtt 140 msec-ot venni. Ez 7 szorzást jelent másodpercenként azaz 25 000-et óránként. Óránként 350 $ mellett 1.4 centbe kerül egy szorzás.

Egy emberből álló számoló-csoport esetén 10 decimális jegyü szorzás /"Friden" vagy "Marchant" asztali számológéppel/ 10 másodpercet vesz igénybe. A szorzást kisérő más müveletekre egy 4-szeres, az ellenőrzésre egy 2-szeres és az emberi gyenge effektivitás, fáradékonyság miatt egy 2-szeres faktort célszerü venni. Ez 160 másodpercet, vagyis 3 percet tesz ki szorzásonként, azaz 20 szorzás esik egy órára.

Nagyon jó számitócsoportokról szerzett ismereteim alapján ezek a számok nem pesszimisztikus becslésből adódnak. Ez 800 szorzást jelent egy 40 órás héten. 50 $-t véve egy számoló-ember heti béreként és 2-szeres faktort az általános költségek miatt 12.5 centet kapunk egy szorzásra.

Ez azt jelenti, hogy egy SSEC ezen árak mellett 12.5/1.4= 9-szer olcsóbb mint a számoló-ember."

A továbbiakban Neumann János kiszámitja, hogy hány embert pótol a számitógép. Figyelembe véve, hogy a számitógép heti 40 órás müködése alatt 30-50 százalékos produktiv időt jelent, a számitógép 500 embert pótol.

A továbbiakban /"Más számitógépek" cimmel/ a kifejlesztés alatt álló ujabb számitógépek teljesitményét és egyéb paramétereit is elemzi.

Ugy látja, hogy az uj gépek sebessége 5-50-szer nagyobb lesz, mint a SSEC gépé. Ezek naponta 16-24 órát üzemelnek és 5 esetleg 7 napot egy héten. Produktivitásuk több mint 50 %-os lesz. Ezekből a számokból azt következteti ki, hogy az uj gépek 10 000-100 000 emberrel lesznek ekvivalensek. Neumann János előrejelzése szerint ilyen gépek 1-3 év mulva jelennek meg, digitálisak lesznek, 2000-4000 elektroncsövet tartalmaznak. /A SSEC 12 000 elektroncsövet és 20 000 elektromechanikus relét tartalmazott, közli Neumann János ugyanitt./

Elemzi az alkatrészek meghibásodási valószinüségét is. Nyolc óránkénti egy hibás müvelet esetén müveletenként 10^{-12} hibavalószinüség adódik. Megjegyzi, hogy a telefonrelék 10^{-8} - 10^{-9} hibavalószinüséggel müködnek, az elektroncsövek ennél rosszabbul. Ugy látja, hogy a 10^{-12}-es számot nem könnyü elérni.

Ugy gondolom érdekes ezeket a 30 évvel ezelőtti számokat olvasni, különösen ha azt is tudjuk, hogy az akkor erre legilletékesebb ember vetette papirra őket.

A numerikus megoldási módszer kidolgozása és a stabilitás elemzése után Neumann János pontosan meghatározza a müveletszámokat és megvizsgálja, hogy a különböző számu osztópontok esetén mennyi gépidő szükséges a SSEC gépen.

"Tehát....170 000 szorzás tartozik egy feladathoz azaz 210 ember-hét vagy 7 óra a SSEC gépen; 40 %-os hatékonyságot feltételezve a gépen ez 18 óra azaz 2.2, 8 órás nap."

Vagy másutt:

"Egy 'nagy' feladat, amelyben az x osztó-pontok száma 25, a t osztó-pontoké 120 azaz m=25, n=120, tehát 3000 csomópont esetén

3000x16 sec=48 000 sec, 13.3 órát igényel"

Statisztikai módszerek a neutrondiffuzió vizsgálatára

A dolgozat voltaképpen egy levél, amit Neumann János R. Richtmyernek irt /1947. márc. 11. keltezéssel/.

A szerző által javasolt eljárás talán az első szimulációs módszer a számitástechnika történetében. A neutron paraméterei véletlen számok, a jelenség /a neutronok mozgása, összeütközése/ leirása ezekkel történik. Sok szó esik a dolgozatban az ENIAC számológépről; a szerző ebben a munkában is pontos számitásokat végez a gépidő tekintetében.

Érdekessége a dolgozatnak az is, hogy Neumann János a teljes számitási sémát /"computing sheet"/ egy erre a célra konstruált programozási nyelven közli, amelyről azt irja, hogy ez ugyan nem "/emberi/ számoló csoportnak" és nem az ENIAC számológépnek készült, de mindkettő számára jó alap. Lássunk ebből a programból /számitási sémából/ néhány sort:

		Instructions /utasitások/	Explanations /magyarázat/
	1	r of C_1-1, see /1/	r_{i-1}
	2	r of C_1 , see /1/	r_i
	3	$/C_3/^2$	s^2
	4	$/C_2/^2$	r^2
	5	3-4	s^2-r^2
	6	$C_3\begin{cases} \geq 0 \therefore A \\ < 0 \therefore B \end{cases}$	$s\begin{cases} \geq 0 \therefore A \\ < 0 \therefore B \end{cases}$
Only	7	$/1/^2$	r^2_{i-1}
for	8	5+7	$r^2_{i-1} + s^2 - r^2$
B	9	$8\begin{cases} \leq 0 \therefore B' \\ > 0 \therefore B'' \end{cases}$	$r^2_{i-1} + s^2-r^2\begin{cases} \leq 0 \therefore B' \\ > 0 \therefore B'' \end{cases}$

Mint látjuk az egy szimbólikus nyelven felirt program, 1974-ből.

<u>Az e és π számok első 2000 decimális számjegyének a kiszámitása statisztikai módszerrel az ENIAC számológépen</u>
/Társszerzők N.C. Metropolis, G. Reitwiesner/

Ebben, a nyomtatásban két oldalas, kis közleményben a szerzők beszámolnak arról, hogy Monte-Carlo tipusu módszerrel hogyan számitották ki az ENIAC számológépen e és π értékét 2000 jegyre. /Megjelent a Mathematical Tables and Other Aids to Computation c. folyóiratban./

Különféle technikák véletlen számjegyek generálására /J. Res. Nat. Bur. Stand. c. folyóiratban./

A kézi számitásokban véletlen számokat táblázatból célszerü venni, számitógépen azonban ez a módszer nem alkalmazható, mert ott egyfelől gyorsan kellenek ezek a számok, másfelől pl. Monte-Carlo tipusu módszerek esetén nagy szériában van szükség adott elosztásu véletlen számokra. A szerző módszereket javasol különféle eloszlású véletlen számok generálására.

A Kummer probléma numerikus megoldása /Társszerző H.H Goldstine/

Kummer Megmutatta, hogy az

$$x_p = 1 + 2 \sum_{v=1}^{(p-1)/2} \cos \left(2\pi \nu^2/p\right)$$

összeg minden $p \equiv 1 /\mathrm{mod}\ 3/$ primszámra kiegésziti az

$$x^3 - 3px - pA = 0$$

egyenletet, ahol

$$4p = A^2 + 27B^1 \qquad A \equiv 1 /\mathrm{mod}\ 3/$$

és aszerint, hogy x_p a legnagyobb legkisebb vagy közbülső gyöke-e a fenti harmadfoku egyenletnek, osztályokba sorolta a p számokat.

A szerzők a $7 \leq p \leq 9973$ intervallumra számitógéppel végezték el az osztályba sorolást és verifikálták Kummernek a $7 \leq p \leq 45$ intervallumra kapott eredményeit.

$2^{1/3}$ lánctörtekkel történő előállitása
/Társszerző B. Tuckerman/

Az egy oldalas közlemény a Mathematical Tables and Other Aids to Computation folyóiratban jelent meg. A lánctörtekkel történő sorbafejtést számitógép segitségével végezték el.

Az előzőekben ismertetett dolgozatok, ebben a sorrendben Neumann János Munkái Gyüjteményének V. kötetében találhatók meg. Ennek a kötetnek a cime: A számitógépek tervezése, az automaták elmélete, numerikus analizis.

A VI. kötetben is szerepelnek olyan dolgozatok, amelyek a numerikus módszerek cimszó alá is gyüjthetők lennének. A kiadvány szerkesztője ezeket nyilván azért tette be a VI. kötetbe, mert e munkáknál az alkalmazási területet akarta kiemelni /játékelméletet, fizika stb./.

Numerikus módszer az optimális stratégia meghatározására

A dolgozat a "Naval Research Logistics Quarterly" c. folyóiratban jelent meg. A dolgozat elején lévő összefoglalás:

"Az alábbi dolgozat a '2 személyes játék' vagy az 'optimális lineáris programozás' problémájának megoldására ad megoldást olymódon, hogy a mind a számitás maximális hosszát, mind a számitásban előforduló számok maximális méretét előre lehet garantálni. A dolgozat végén a módszernek G. Dantzig 'Szimplex módszerével' való összehasonlitásával kapcsolatos néhány megjegyzés szerepel".

Ez a dolgozat is tipikus: Neumann János a müveletszámot pontosan kiszámitja és azt is megadja, hogy melyik gépen hány msec. a megoldási idő. Ilyen megjegyzések is szerepelnek benne: "A probléma megoldását meg lehet ugy szervezni, hogy a dobmemória használata ne jelentsen lényeges lassulást; speciálisan /32.7/, /32.8/-at amelyek nagy dobmemória kapacitást igényelnek célszerü szubrutinokkal kezelni..."

Numerikus módszer nagyszámu stratégiát tartalmazó zéróösszegü kétszemélyes játék értékének és legjobb stratégiájának meghatározására

Ez a munka kéziratos formában forgott közkézen akkor, amikor gyakorlatilag semmi sem volt ismert a zéró-összegü kétszemélyes játék megoldásának kiszámitásával kapcsolatban.

A rövid - nyomtatásban 1 oldalas - cikk végén /mint mindig a numerikus módszerekkel kapcsolatos Neumann-dolgozatokban/ becslést kapunk a müvelet számára és a gépidőre /egy 100x200-as rendü játéknál a szükséges gépidő 400 nap, de speciális esetekben ez lényegesen csökkenthető/.

<u>A hidrodinamikai nyomás vizsgálatára alkalmas uj numerikus módszer és ennek elemzése</u>

A dolgozat egy beszámolójelentés /1944-ből/ a honvédelmi minisztérium egy bizottsága részére, amelyben Neumann János a hidrodinamikai nyomást leiró parciális differenciálegyenletre ad egy közelitő megoldást. A közelitésben szereplő számitások elvégzésére lyukkártyás gépet javasol.

<u>Módszer a hidrodinamikai nyomás numerikus kiszámitására</u>
/Társszerző: R.D. Richtmyer/

A dolgozat a Journal of Applied Physics cimü folyóiratban jelent meg 1950-ben.

A szerzők a differenciálegyenletet differenciaegyenlettel közelitik, és vizsgálják az utóbbi stabilitását.

A légáramlás egyenletének numerikus integrálása
/Társszerzők: J.G. Charney, R. Fjörtoft/

A dolgozat 1950-ben jelent meg a Tellus cimü folyóiratban.

Meteorológiai előrejelzés céljából numerikus módszert javasolnak a szerzők a jelenséget leiró parciális differenciálegyenletekre, és itt is megvizsgálják a közelitő differenciaegyenletek stabilitását. A számitásokat az ENIAC gépen végezték. /Érdekességként megemlitjük, hogy a szerzők a dolgozat végén köszönetet mondanak a program elkészitéséért Mrs. Klara von Neumannak, amiből kiderül, hogy Neumann János felesége programozó volt, az elsők között ebben a szakmában./

The purpose of this paper is to find a rapidly converging iterative method for the solution of linear equation systems, and quite particularly of those which arise from the difference equation treatment of partial differential equations of the elliptic type. (2 nd order, s [= 2, 3, ...] variables).

Sections 2. - 6. are introductory. The method will be described and discussed in sections 7. - 13. The application to the (elliptic) differential equation case will be made in sections 14. -15. Some comparisons will be made The results section are summarised in sections 11., 13., 15.

1\. Consider a system of n linear equations in n variables, written vectorially:

(1) $A \vec{\xi} = \vec{\alpha}$.

Here $\vec{\alpha}$ is a known n-th order vector, A a known n-th order matrix, ξ the unknown n-th order vector. In order that the problem be ~~#~~ meaningful, A must be non-singular. This will be

Neumann egy lineáris egyenletrendszer megoldásával foglalkozó dolgozatának kézirata /első oldal/

/ 1946.? /

IRODALOM

Az irodalomjegyzék négy részre tagolódik. Az A részben Neumann János rövidebb közleményei hatkötetes gyüjteményes kiadásának tartalomjegyzékét adjuk, a folyóiratban vagy egyéb hozzáférhető helyen publikált munkáknál az első megjelenés adatait is megjelölve; utalunk az esetleges magyar forditásra is. A B rész Neumann könyveinek és egyéb, az összkiadásban nem szereplő munkáinak jegyzéke. A C és D rész a Neumann életével és munkásságával kapcsolatos magyar, illetve idegen nyelvü forrásmunkákat tartalmazza.

A

John von Neumann: Collected Works. General editor: A.H. Taub. Pergamon Press, 1961-63.
Volume I. Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics.

1. The Mathematician. The Works of Mind /Univ. Chicago Press, 1947/, 180-196. - Magyarul: [B/19], 11-27.

2. /and M. Fekete/ Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome. Jahresb. d. Deutsch. Mat. Verein. 31 /1922/, 125-138.

3. Zur Einführung der transfiniten Zahlen. Acta Sci. Math. /Szeged/ 1/1923/, 199-208.

4. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. J.f. Math. 154 /1925/, 219-240.

5. Egyenletesen sürü számsorozatok. Math. és Phys. Lapok 32 /1925/, 32-40.

6. Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen. Acta Sci. Math. /Szeged/, 2/1926/, 193-227.

7. /and D. Hilbert and L. Nordheim/ Über die Grundlagen der Quantenmechanik. Math. Annales 98/1927/, 1-30.

8. Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. /1927/, 76-90.

9. Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Gött. Nachr. /1927/, 1-57.

10. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. Gött. Nachr. /1927/, 245-272.

11. Thermodynamik Quantenmechanischer Gesamtheiten. Gött. Nachr. /1927/, 273-291.

12. Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Zeitschr. 26/1927/, 1-46.

13. Die Zerlegung eines Intervalles in abzählbar viele kongruente Teilmengen. Fund. Math. 11/1928/, 230-238.

14. Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen. Math. Annalen 99/1928/, 134-141.

15. Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre. Math. Annalen 99/1928/, 373-391.

16. Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 27 /1928/, 669-752.

17. Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Drehelektrons. Zeitschr. f. Physik 48/1928/, 868-881.

18-20. /and E. Wigner/ Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, I-III. Zeitsch. f. Physik 47/1928/, 203-220; 49/1928/, 73-94; 51/1928/, 884-858.

21. Über einige Widerspruchfreiheitsfrage der axiomatischen Mengenlehre. J.f. Math. 160/1929/, 227-241.

22. Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen. Math Zeitschr. 30/1929/, 3-42.

23. /and E. Wigner/ Über merkwürdige diskrete Eigenwerte. Phys. Zeitschr. 30/1929/, 465-467.

24. /and E. Wigner/ Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen. Phys. Zeitschr. 30 /1929/, 467-470.

25. Beweis des Ergodensatzes und des H-Theorems in der neueren Mechanik. Zeitschr. f. Physik 57 /1929/, 30-70.

26. Zur allgemeinen Theorie des Masses. Fund. Math. 13/1929/, 73-116.

27. Zusatz zur Arbeit "Zur allgemeinen Theorie des Masses". Fund. Math. 13/1929/, 333.

Volume II. Operators, Ergodic Theory and Almost Periodic Functions in a Group

1. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Annalen 102/1929/, 49-131.

2. Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren. Math. Annalen 102/1929/, 370-427.

3. Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen. J. f. Math. 161/1929/, 208-236.

4. Über einen Hilfssatz der Variationsrechnung. Hamb. Abhandlungen 8/1930/, 28-31.

5. Über Funktionen von Funktionaloperatoren. Annals of Math. 32/1931/, 191-226.

6. Algebraische Repräsentanten der Funktionen "bis auf eine Menge vom Masse Null". J. f. Math. 165 /1931/, 109-115.

7. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren. Math. Annalen 104/1931/, 570-578.

8. Bemerkungen zu den Ausführungen von Herrn St. Lesniewski über meine Arbeit "Zur Hilbertschen Beweistheorie". Fund. Math. 17/1931/, 331-334.

9. Die formalistische Grundlegung der Mathematik. Erkenntniss 2/1931/, 116-121.

10. Zum Beweise des Minkowskischen Satzes über Linearformen. Math. Zeitschr. 30/1932/, 1-2.

11. Über adjungierte Funktionaloperatoren. Annals of Math. 33/1932/, 294-310.

12. Proof of the quasi-ergodic hypothesis. N.A.S. Proceedings 18/1932/, 70-82.

13. Physical applications of the ergodic hypothesis. N.A.S. Proceedings 18/1932/, 263-266.

14. /and O. Koopman/ Dynamical systems of continuous spectra. N.A.S. Proceedings 18/1932/, 255-263.

15. Über einen Satz von Herrn M.H. Stone. Annals of Math. 33/1932/, 567-573.

16. Einige Sätze über messbare Abbildungen. Annals of Math. 33/1932/, 574-586.

17. Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik. Annals of Math. 33/1932/, 587-642.

18. Zusätze zur Arbeit "Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik". Annals of Math. 33/1932/, 789-791.

19. Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. Annals of Math. 34/1933/, 170-190.

20. A koordináta-mérés pontosságának határai az elektron Dirac-féle elméletében. Mat. és Természettud. Értesitő 50/1933/, 366-385.

21. /and P. Jordan and E. Wigner/ On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Annals of Math. 35/1934/, 29-34.

22. Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen. Compos. Math. 1/1934/, 106-114.

23. Almost periodic functions in a group, I. Trans. Amer. Math. Soc. 36/1934/, 445-492.

24. /and A.H. Taub and O. Veblen/ The Dirac equation in projective relativity. N.A.S. Proceedings 20 /1934/, 383-388.

25. On complete topological spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 37/1935/, 1-20.

26. /and S. Bochner/ Almost periodic functions in groups, II. Trans. Amer. Math. Soc. 37/1935/, 21-50.

27. + Comparison of cells.

Volume III. Rings of Operators

1. On a certain topology for rings of operators. Annals of Math. 37/1936/, 111-115.

2. /and F.J. Murray/ On rings of operators. Annals of Math. 37/1936/, 116-129.

3. /and F.J. Murray/ On rings of operators, II. Trans. Amer. Math. Soc. 41/1937/, 208-248.

4. On rings of operators, III. Annals of Math. 41/1940/, 94-161.

+ Kéziratos feljegyzés ismertetése.

5. /and F.J. Murray/ On rings of operators, IV. Annals of Math. 44/1943/, 716-808.

6. On infinite direct products. Compos. Math. 6/1938/, 1-77.

7. On rings of operators. Reduction theory. Annals of Math. 50/1949/, 401-485.

8. On some algebraical properties of operator rings. Annals of Math. 44/1943/, 709-715.

9. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. I. Мат.сборник 1/1936/, 415-484.

10. + Characterization of factors of type II_1

Volume IV. Continuous Geometry and Other Topics

1. /and S. Bochner/ On compact solutions of operational-differential equations, I. Annals of Math. 36 /1935/, 255-291.

2. Characterisierung des Spektrums eines Integraloperators.

3. On normal operators. N.A.S. Proceedings 21/1935/, 366-369.

4. /and P. Jordan/ On inner products in linear, metric spaces. Annals of Math. 36/1935/, 719-723.

5. /and M.H. Stone/ The determination of representative elements in the residual classes of a Boolean algebra. Fund. Math. 26/1935/, 353-378.

6. The uniqueness of Haar's measure. Мат. сборник 1/1936/, 721-734.

+Kéziratos feljegyzés ismertetése.

7. /and G. Birkhoff/ The logic of quantum mechanics. Annals of Math. 37/1936/, 823-843.

8. Continuous geometry. N.A.S. Proceedings 22/1936/, 92-100.

9. Examplex of continuous geometries. N.A.S. Proceedings 22/1936/, 101-108.

10. On regular rings. N.A.S. Proceedings 22/1936/,707-713.

11. Algebraic theory of continuous geometries. N.A.S. Proceedings 23/1937/, 16-22.

12. Continuous rings and their arithmetics. N.A.S. Proceedings 23/1937/, 341-349.

13. /and I. Halperin/ On the transitivity of perspective mappings. Annals of Math. 41/1940/, 87-93.

14. The non-isomorphism of certain Continuous rings. Annals of Math. /1958/, 485-496.

15. + Independence of F_{∞} from the sequence ν

16. + Continuous geometries with a transition probability.

17. + Quantum logics /strict- and probability-logics/.

18. + Lattice Abelian groups.

19. /and C. Kuratowski/ On some analytic sets defined by transfinite induction. Annals of Math. 38/1937/, 521-525.

20. Some matrix-inequalities and metrization of a matrix-space. Томский Гос.Унив.Ученые записки 1/1937/, 286-300.

+ Kéziratos feljegyzés ismertetése.

21. /and E. Wigner/ Minimally almost periodic groups. Annals of Math. 41/1940/, 746-750.

22. /and J. Schoenberg/ Fourier integrals and metric geometry. Trans. Amer. Math. Soc. 50/1941/, 226-251.

23. /and P.R. Halmos/ Operator methods in classical mechanics, II. Annals of Math. 43/1942/, 332-350.

24. Approximative properties of matrices of high finite order. Portugaliae Math. 3/1942/, 1-62.

25. /and I.E. Segal/ A theorem on unitary representations of semisimple Lie groups. Annals of Math. 52/1950/, 509-517.

26. Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes. Math.Nachr. 4/1951/, 258-281.

27. /and E.P. Wigner/ Significance of Loewner's theorem in the quantum theory of collisions. Annals of Math. 59/1954/, 418-433.

28. /and A. Devinatz and A.E. Nussbaum/ On the permutability of self-adjoint operators. Annals of Math. 62/1955/, 199-203.

29-30. /and R. Schatten/ On the cross-space of linear transformations. II-III. Annals of Math. 47/1946/, 608-630; 49/1948/, 557-582.

31. + Measure in functional spaces.

32. + Representation of certain linear groups by unitary operators in Hilbert space.

33. /and R.H. Kent and H.R. Bellinson and B.I. Hart/ The mean square successive difference. Annals of Math. Stat. 12/1941/, 153-162.

+ Kéziratos feljegyzés ismertetése.

34. Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance. Annals of Math. Stat. 12/1941/, 367-395.

35. A further remark concerning the distripution of the ratio of the mean square succiessive difference to the variance. Annals of Math. Stat. 13 /1942/, 86-88.

36. /and B.I. Hart/ Tabulation of the probabilities for the mean square successive difference to the variance. Annals of Math. Stat. 13/1942/, 207-214.

37. Optimum aiming at an imperfectly located target.

Volume V. Design of Computers, Theory of Automata and Numerical Analysis

1. /and H.H.Goldstine/ On the principles of large scale computing machines.

2. /and A.W. Burks and H. H. Goldtine/ Preliminary discussion of the logical design of an electronic computing instrument, I.1.

3-5. /and H.H. Goldstine/ Planning and coding of problems for an electronic computing instrument, II.1-II.3.

6. The future of high-speed computing. - Magyarul: [B/19], 44-46.

7. The NORC and problems in high-speed computing.

8. Entwicklung und Ausnutzung neuerer mathematischer Maschinen. - Magyarul: [B/19], 47-73.

9. The general and logical theory of automata. - Magyarul: Fizikai Szemle 17/1967/, 229-236 és 280-288; továbbá [C/8], 55-114.

10. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components. Automata Studies /Princeton, 1956/, 43-98.

11. Non-linear capacitance or inductance switching, amplyfying and memory devices.

12. + Notes on the photon-disequilibrium-amplification scheme.

13. /and V. Bargmann and D. Montgomery/ Solution of linear systems of high order.

14. /and H.H. Goldstine/ Numerical inverting of matrices of high order. Bulletin of the Amer. Math. Soc. 53/1947/, 1021-1099.

15. /and H.H. Goldstine/ Numerical inverting of matrices of high order, II. Proceedings of the Amer. Math. Soc. 2/1951/, 188-202.

16. /and H.H. Goldstine and F.J. Murray/ The Jacobi method for real symmetric matrices. J. Assoc. Computing Machinery 6/1959/, 59-96.

17. /and A. Blair and N. Metropolis and A.H. Taub and M. Tsingou/ A study of a numerical solution to a two-dimensional hydrodynamical problem. Math. Tables and other Aids to Computation 13 /1959/, 143-184.

18. /and R.D. Richmyer/ On the numerical solution of partial differential equations of parabolic type.

19. First report on the numerical calculation of flow problems.

20. Second report on the numerical calculation of flow problems.

21. /and R.D. Richmyer/ Statistical methods in neutron diffusion.

22. /and N.C. Metropolis and G. Reitweisner/ Statistical treatment of values of first 2000 decimal digits of e and of π calculated on the ENIAC. Math. Tables and other Aids to Computation 4/1950/, 109-111.

+ Kéziratos feljegyzés ismertetése.

23. Various techniques used in connection with random digits. J. Res. Nat. Bus. Stand. Appl. Math. Series 3/1951/, 36-38.

24. /and H.H. Goldstine/ A numerical study of a conjecture of Kummer. Math. Tables and other Aids to Computation 7/1953/, 133-134.

25. /and B. Tuckerman/ Continued fraction expansion of $2^{1/3}$. Math. Tables and other Aids to Computation 9/1955/, 23-34.

Volume VI. Theory of Games, Astrophysics, Hydrodynamics and Meteorology

1. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Math. Annalen 100/1928/, 295-320. - Magyarul [B/19], 121-156.

2. Communication on the Borel notes. Econometrica 21 /1953/, 124-125. - Magyarul: [B/19], 157-159.

3. A model of general economic equilibrium. Rev. Economic Studies 13/1945/, 1-9. - Magyarul: [B/19], 160-176.

4. /and G.W. Brown/ Solutions of games by differential equations. Contributions to the Theory of Games /1953/, 5-12.

5. A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem. Contributions to Theory of Games, II. /1953/, 5-12.

6. /and D.B. Gillies and J.P. Mayberry/ Two variants of poker. Contributions to the Theory of Games, II. /1953/, 13-50.

7. A numerical method to determine optimum strategy. Naval Res. Logistics Quarterly 1/1954/, 109-115.

8. Discussion os a maximum problem.

9. + Numerical method for determination of value and best strategies of O-sum, 2-person game with large number of strategies

10. + Symmetric solutions of some general N person games.

11. The impact of recent developments in science on the economy and on economics. Looking Ahead 4 /1956/, 11. - Magyarul: [B/19], 100-102.

12-13. /and S. Chandrasekhar/ The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars, I-II. Astrophys.J. 95/1942/, 489-531; 97/1943/, 1-27.

14. + Static solution of Einstein field equation for perfect fluid with $\Gamma^{\rho}_{\varsigma} = 0$

15. + On the relativistic gas-degeneracy and the collapsed configuration of stars.

16. + The point source model.

17. + The point source solution, assuming a degeneracy of the semi-relativistic type, $p = K\rho^{4/3}$, over the entire star.

18. + Discussion of De Sitter's space and of Dirac's equation in it.

19. Theory of shock waves.

20. Theory of detonation waves.

21. The point source solution.

22. Oblique reflection of shocks.

23. Refraction, intersection and reflection of shock waves.

+ Kéziratos feljegyzés ismertetése.

24. /and F. Reines/ The Mach effect and the height of burst.

25. Discussion on the existence and uniqueness or multiplicity of solutions of the aerodynamical equations.

26. Use of variational methods in hydrodynamics.

27. Proposal and analysis of a new numerical method for the treatment of hydrodynamical shock problems.

28. /and R.D. Richtmyer/ A method for numerical calculations of hydrodynamic shocks.

29. /and H.H. Goldstine/ Blast wave calculation. Comm. Pure and Appl. Math. 8/1955/, 327-353.

30. /and J.G. Charney and R. Fjörtoft/ Numerical integration of the barotropic vorticity equation. Tellus 2/1950/, 237-264.

31. /and E. Fermi/ Taylor instability at the boundary of two incompressible liquids.

32. + Taylor instability problem.

33. Recent theories of turbulence.

34. + Description of the conformal mapping for the integration of partial differential equation systems with 1+2 independent variables.

35. The role of mathematics in the sciences and society. - Magyarul: [B/19], 28-43.

36. Method in the physical sciences. The Unity of Knowledge /Doubleday, N.Y., 1955/, 157-164. - Magyarul: [B/19], 74-83.

37. Statement before the special senate committee on atomic energy. - Magyarul: [B/19], 94-99.

+ Kéziratos feljegyzés ismertetése.

38. Can we survive technology? Fortune /1955/. - Magyarul: [B/19], 103-118.

39. Impact of atomic energy on the physical and chemical sciences. - Magyarul: [B/19], 84-93.

40. Defense in atomic war.

41. Discussion - shape of metal grains. Metal Interfaces Am. Soc. for Metals /1952/, 108-110.

B

1. Az általános halmazelmélet axiomatikus fölépitése. /Doktori értekezés./ Budapest, 1926.

2. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Springer, Berlin, 1932.

3. Lectures on continuous geometry. /Jegyzet./ Princeton, 1933-37.

4. Quantum mechanics of infinite systems. /Jegyzet Dirac előadásai alapján./ Princeton, 1934-35.

5. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Ergebnisse eines Mathematischen Colloquiums, Wien 8 /1937/, 73-83.

6. Quantum logics. /Jegyzet/ Princeton, 1937-38.

7. /and R. H. Kent/ The estimation of the probable error from successive differences. /Jelentés./ 1940.

8. Invariant measures. /Jegyzet./ Princeton, 1940-41.

9. Shock waves started by an infinitesimally short detonation of given /postitive and finite/ energy. /Jelentés./ 1941.

10. /and R. J. Seeger/ On oblique reflection and collision of shock waves. /Jelentés./ 1943.

11. /and O. Morgenstern/ Theory of games and economic behavior. Princeton Univ. Press, 1944.

12. A "Report of Informal Technical Conference on the Mechanism of Detonation" c. jelentés I. /Introductory remarks/, XII. /Theory of the spinning detonation/ és XIII. /Theory of the intermediate product/ fejezetei. 1944.

13. A "Shock hydrodynamics and blast waves" c. jelentés "Riemann method", "Shock waves and discontinuities /one-dimensional/" és "Two-dimensional hydrodynamics" c. fejezetei. 1945.

14. /and A. H. Taub/ Flying wind tunnel experiments. /Jelentés./ 1945.

15. On the theory of stationary detonation waves. /Jelentés./ 1948.

16. Functional operators, I-II. /Measures and integrals - The geometry of orthogonal spaces/ Princeton Univ. Press, 1950.

17. The computer and the brain. Yale Univ. Press, New Haven, 1958. /A szerző felesége élőszavával./

17a. A számológép és az agy. Gondolat, Budapest, 1964. /Tarján Rezső utószavával és Szalai Sándor jegyzeteivel kiegészitve./

18. Continuous geometry. Princeton Univ. Press, 1960.

19. Válogatott előadások és tanulmányok. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1965. /Előszó és a "Collected Works" I., V. és VI. kötetében szereplő 12 közlemény forditása./

20. Theory of self-reproducing automata. Univ. of Illinois Press, 1966. - Néhány részlete magyarul: [C/12], 36-57.

C

1. Neumann János. Mat. Lapok 8 /1957/, 1-7. és 210.

2. Szőkefalvi-Nagy Béla: Neumann János munkássága az operátorelmélet területén. Mat. Lapok 8 /1957/, 185-210.

3. Tarján Rezső: Neumann János elektronikus számológépekkel kapcsolatos munkássága. Mat. Lapok 9 /1958/, 6-18.

4. I. Halperin: A Neumann János-féle folytonos geometria. Mat. Lapok 9 /1958/, 225-231.

5. Hajnal András: Neumann János axiomatikus halmazelméleti munkásságáról. Mat. Lapok 10 /1959/, 5-11.

6. Rédei László: Neumann János munkássága az algebrában és számelméletben. Mat. Lapok 10 /1959/, 226-230.

7. Péter Rózsa: A halmazelmélet axiómarendszerei. Mat. Lapok 16 /1965/, 185-227.

8. A kibernetika klasszikusai /válogatott tanulmányok/. Gondolat, Budapest, 1965.

9. Wigner Jenő: Neumann János. Fizikai Szemle 17 /1967/, 227-229.

10. Neumann János. Magyar életrajzi lexikon, II. /Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969/, 296-298.

11. Halmos Pál: A Neumann-legenda. Természet Világa 108 /1977/, 14-17.

12. Sejtautomaták /Cikkgyüjtemény./ Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

D

1. John von Neumann, 1903-1957. Bulletin of the Amer. Math. Soc. 64 /1958/, Number 3, Part 2. - A füzet tartalma: S. Ulam: J. v. Neumann, 1-49; G. Birkhoff: V. Neumann and lattice theory, 50-56; J. F. Murray: Theory of operators, I /Single operators/, 57-60; R. V. Kadison: Theory of operators, II /Operator algebras/, 61-85; P. R. Halmos: V. Neumann on measure and ergodic theory, 86-94; L. v. Hove: V. Neumann's contributions to quantum theory, 95-99; H. W. Kuhn and A. W. Tucker: J. v. Neumann's work in the theory of games and mathematical economics, 100-122; C. E. Shannon: V. Neumann's contributions to automata theory, 123-129.

2. F. Smithies: John von Neumann. J. of London Math. Soc. 34 /1959/, 373-384.

3. L. Kalmár: Über eine Variante des Neumannschen selbstreproduzierenden Automaten. Math. und Physikal-Techn. Probleme der Kybernetik /Berlin, 1963/ 522-528.

4. Von Neumann, John. World Who's Who in Science /Marquis, Chicago, 1968/, 1738.

5. P. R. Halmos: The legend of John von Neumann. Amer. Math. Monthly 80/1973/, 382-394. - Magyarul: /C/11/.

6. S. M. Ulam: Adventures of a mathematician. Scribner's Sons, New York, 1976.

7. E. Borel, La théorie du jeu et les équations integrales a noyau symetrique, C.R. Acad. Sci. 173 /1921/ 1304-1308.

8. E. Borel, Sur les jeux ou interviennent le hasard et l' habilité des joueurs, Théorie des probabilités, Librairie scientifique, Hormann, Paris /1924/ 204-224.

9. E.Borel: Sur les systemes de formes linéaires a determinant symétrique gauche et la théoria générale du jou, C.R. Acad. Sci. 184 /1927/ 52-53.

10. G.B. Dantzig: Linear programming and extensions, Princeton University Press, Princeton, N.J. /1963/.

11. D. Gale, H.W. Kuhn and A.W. Tucker: Linear programming and the theory of games, Activity Analysis of Production and Allocation /T.C. Koopmans, szerkesztő/ Wiley /1951/, 317-329.

12. Haar A.: A lineáris egyenlőtlenségekről, Matematikai és Természettudományi Értesitő 36 /1918/ 279-296.

13. O. Morgenstern: The collaboration between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the theory of games.

14. O. Morgenstern: Wirtschaftsprognose, eine Untersuchung ihrer Voraussetzungen und Möglichkeiten, Springer Verlag /1928/.

15. Prékopa A.: Az optimalizáláselmélet kialakulásáról. Alkalmazott Matematikai Lapok 4 /1978/, sajtó alatt.

16. J. Ville: Sur la théorie générale des jeux ou intervient l'habilité des joueurs, Traité du calcul des probabilités et de ses applications IV. E. Borel /szerkesztő/, Gauthior-Villars /1938/ 105-113.

17. Györgyi G.: Neumann János levelei Ortvay Rudolfhoz Fizikai Szemle, 1973. 12., 357-370.

18. Szentiványi T.: Neumann János további levelei Ortvay Rudolfhoz. Fizikai Szemle, 1979. /sajtó alatt/

19. Knuth, D.E.: Von Neumann's first computer program Computing Surveys /1970/, Dec., 247-260.

SZÁMOK Repró 1979

0585

Ára: 40,– Ft