Társulati élet

A Bolyai János Matematikai Társulat fennállásának 10. évfordulója alkalmából Szegeden 1957. szeptember 21—23-án rendezett Jubileumi Vándorgyűlés előadásai:

PLENÁRIS ÜLÉS

1957. szeptember 21.

Ünnepi megemlékezés a Társulat fennállásának 10 éves évfordulója alkalkalmából. Tartotta Rédei László a Szegedi Tagozat elnöke.

Kalmár László: *A szegedi logikai gép.* A szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával épül egy logikai gép, a következő típusú feladatok megoldására: Adva van az ítéletkalkulusnak egy, legfeljebb 8 logikai változót tartalmazó formulája. A gép kikeresi a változók mindazon értékrendszereit, amelyek mellett a formula értéke „igaz". A gép működése elektromechanikus; a logikai értékeket a hasonló jellegű feladatok megoldására készült Ferranti-féle elektromechanikus logikai géppel ellentétben 3 pont közötti kétféle vezetési állapottal instrumentáljuk, ez lehetővé teszi a logikai műveletek eredménye kiszámításának tisztán huzalos megoldását, úgy hogy jelfogókra csak bizonyos „adminisztratív" feladatok megoldása végett van szükség. Az előadás a szegedi logikai gép legfontosabb áramköreit ismerteti.

Hajós György: *Szabatosság és geometria.* Az előadó példákon mutatta be, hogy milyen hibák szoktak szerepelni a geometriai tárgyalásban. Nem menti a hibákat és hiányokat, ha valaki a szemléletesség ürügyével indokolja azokat. Az előadás elemi geometriai példákkal, főként középiskolai vonatkozásúakkal támasztotta alá mondanivalóját. Ilyen példák voltak: A háromszög köré írt kör sugarának kiszámítása, a szögfüggvények összegezési tételei, annak a ténynek igazolása, hogy a parabolának egyetlen szimmetriatengelye van, és Dandelin-gömbökkel való bizonyítása annak, hogy bizonyos síkok a forgáskúpot ellipszisben metszik.

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLETI SZEKCIÓ

Szász Gábor: *Osztályozáshálókról.* Egy H halmaz összes osztályozásainak $P(H)$ halmazában vezessünk be egy $\leq$ relációt úgy, hogy $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in P(H))$ akkor és csak akkor álljon fenn, ha $\mathfrak{a}$ minden egyes osztálya a $\mathfrak{b}$ valamely osztályának része. Ismeretes, hogy ilymódon $P(H)$-nak egy olyan parciális rendezését nyerjük, amelyre nézve $P(H)$ teljesen relatív komplementumos hálót képez. Az előadó bebizonyítja, hogy ez a háló félig-moduláris is.

SCHMIDT ELIGIUS: *Boole-algebrák hálóelméleti jellemzéséről.* Az előadásban a Boole-algebrák jellemzésére egy új tételt mutatott be. Ezen tétel segítségével könnyűszerrel nyerhetők az irodalomban fellelhető Boole-algebra jellemzések, csekély kivételtől eltekintve. További alkalmazásként Birkhoff egy problémájára az eddig ismerteknél egyszerűbb megoldást adott, K. Iseki egy sejtését megoldotta és általánosította.

GRÄTZER GYÖRGY: *Egy új hálóelméleti ideál-fogalom.* Az előadásban a neutrális-ideál egy általánosításának, a normál-ideálnak tulajdonságait vizsgálta. Ezen ideál típusra sikerült az izomorfia tételek, továbbá a Zassenhaus lemma és a Jordan—Hölder—Schreier tétel érvényességét kimutatnia, továbbá több, eddig csak moduláris hálóra ismert tételt az általános hálók körébe átvinnie. Bizonyos természetszerűleg megkövetelt tulajdonságok mellett, a neutrális ideálok ezen általánosítása a lehető legjobb.

STEINFELD OTTÓ: *Újabb eredmények a kváziideálokkal kapcsolatban.* Az előadásban olyan F félcsoportokról volt szó, amelyeknek létezik $\mathfrak{f}$ Szuskevicsmagjuk és $\mathfrak{f} \subset F$. Št. Schwarz nyomán F-nek egy $\mathfrak{l}$ balideálját *relatív minimálisnak* nevezzük, ha $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{l}$ és nincs az F-nek olyan $\mathfrak{l}'$ balideálja, amelyre $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{l}' \subset \mathfrak{l}$ teljesül. Hasonló módon definiálható a relatív minimális jobbideál és kváziideál is. Az előadásban többek között a következő két tétel szerepelt: 1. Ha $\mathfrak{l}$, illetve $\mathfrak{r}$ az F félcsoport relatív minimális balideálja, illetve jobbideálja, akkor $\mathfrak{l}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ közül vagy mindegyik $\mathfrak{f}$-félcsoport vagy egyik sem az. ($\mathfrak{f}$*-félcsoporton* F-nek olyan V részfélcsoportját értjük, amelyre $V^2 \subseteq \mathfrak{f} \subseteq V$ teljesül.) 2. Az F félcsoport egy $\mathfrak{a}$ relatív minimális kváziideálja vagy $\mathfrak{f}$-félcsoport, vagy $\mathfrak{f}$-val kiegészített csoport. Az utóbbi esetben $\mathfrak{a} = (\mathfrak{f}, \varepsilon F \varepsilon)$, ahol ε az $\mathfrak{a} - \mathfrak{f}$ csoport egységeleme. (Az F félcsoport U részfélcsoportját $\mathfrak{f}$*-val kiegészített csoportnak* nevezzük, ha $\mathfrak{f} \subset U$ és $U - \mathfrak{f}$ különbséghalmaz az F részcsoportja.)

ZÁNYI LÁSZLÓ: *Az algebrai számtest strukturinvariánsairól.* Legyen a $K = K(a_1, \ldots, a_n)$ 0 karakterisztikájú testhez tartozó $K[x]$ polinomgyűrűben

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_{n-1} x + a_n$$

polinom, ahol feltesszük, hogy $a_n \neq 0$, x^n együtthatója 1 és a többszörös tényezők le vannak választva. Képezzük a szintén pontosan n-edfokú

$$\varphi(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_{n-1} y + b_n$$

polinomot a következőképpen:

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = b_1 a_1 - a_2, \quad b_3 = b_2 a_1 - b_1 a_2 + a_3$$

$$b_4 = b_3 a_1 - b_2 a_2 + b_1 a_3 - a_4, \ldots$$

$$b_k = b_{k-1} a_1 - b_{k-2} a_2 + \cdots + (-1)^{k-1} b_1 a_{k-1} + (-1)^k a_k.$$

Legyen $b_n \neq 0$.

A képzési módból világos, hogy a $\varphi(y)$ polinomból ugyanezzel az eljárással előáll az $f(x)$ polinom.

Rédei Algebra 225 tétel második megjegyzése szerint a K alaptesthez az $f(x)$ összes zérus helyét adjungálva, a nyert test lényegében véve K-tól és $f(x)$-től függ. Hasonlóan, $\varphi(y)$ gyökeit K-hoz adjungálva, egy másik felbontási testet kapunk. A szerző e két felbontási test között fennálló kapcsolatokat (ideálelmélet, Galois-elmélet stb.) vizsgálja.

Figyelemre méltó eset, ha az $f(x)$ és $\varphi(y)$ együtthatói egyenlők, más szóval, ha az $f(x)$ és $\varphi(y)$ azonos. Ekkor csak a páratlan indexű együtthatók függetlenek, a páros indexűek ezektől függnek. Ezzel új érdekes n-edfokú számtestet kaptunk.

Seres Iván: *Bizonyos irreducibilis polinomok.* Legyen adva a következő racionális egész együtthatójú és a racionális számtest (Γ) fölött irreducibilis polinom: $f(z)=z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z\pm 1$, amelynek nem minden gyöke valós, továbbá az $a_1<a_2<\cdots<a_n$ racionális egész számok. Az $F(x)=$ $=f(P(x)\cdot Q(x))$ polinom irreducibilis a Γ fölött az esetben mindig, ha $P(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$, $n\geqq 6$, $Q(x)$ oly racionális egész együtthatójú polinom, melynek főegyütthatója 1 és foka kisebb n-nél.

A bizonyítást P. L. Dirichletnek az egységekre vonatkozó tételével és L. Kroneckernek módszerével sikerült végrehajtani.

ANALÍZIS SZEKCIÓ

Bognár Mátyás: *Megjegyzés Riesz Frigyes szegedi rektori székfoglaló beszédéhez.* Riesz a szegedi rektori székfoglaló beszédében a következő problémát vetette fel és oldotta meg elemi eszközök felhasználásával:

Egy T területű síktartományban fekvő görbén egy r sugarú kört csusztatunk végig. Feltesszük, hogy a kör a csúsztatás során a tartomány belsejében marad. Ekkor a körök burkolójának a hossza legfeljebb $2T/r$.

A bizonyítás során Riesz támaszkodik arra a tényre, hogy ha egy görbe torlódási görbéje egy görbehalmaznak, és a görbehalmaz egyik egyedének a hossza sem halad meg egy bizonyos korlátot, akkor az eredeti görbe hossza sem haladja meg azt.
Mivel a burkoló esetleg végtelen sok komponensből is állhat és maguk a komponensek sem okvetlenül zárt Jordan görbék, ezért célszerűbbnek látszik a következő tétel felhasználása.

Legyen adott a síkban az összefüggő halmazoknak egy olyan rendszere, amelynél egyik halmaz átmérője sem kisebb valamely előre megadott pozitív alsó korlátnál. Ha itt véges sok halmaz egyesítése határának az egydimenziós Hausdorff-féle mértéke — akárhogyan véve ki a véges sok halmazt — nem halad meg egy bizonyos korlátot, akkor a rendszerhez tartozó valamennyi halmaz egyesítése határának az egydimenziós Hausdorff-féle mértéke sem haladja meg azt.

Fenyő István: *Megjegyzések az operátorszámítás megalapozásához.* Legyen C_2 azon $a(x,y)$ kétváltozós függvények osztálya, amelyek azonosan eltünnek, ha $y>x$ és folytonosak, ha $x<y$. Két a és b $(\in C_2)$ függvény konvolucióján a

$$C(x,y)=a*b=\int_y^x a(x,t)\,b(t,y)\,dt$$

integrált értjük, ha $y<x$ és $C\equiv 0$, ha $y\geqq x$. Ha $a*b=b*a$, akkor azt mondjuk, hogy a és b felcserélhetők. Legyen $a\in C_2$ és tekintsük mindazon

C_2-beli függvényeket, melyek a-val felcserélhetők. Ezek egy R_a gyűrűt alkotnak. Az $a * u = b$ (a és $b \in R_a$) integrálegyenlet „megoldásait" a és b által meghatározott *operátornak* nevezzük és $\frac{a}{b}$-vel jelöljük. Ha az előbbi integrálegyenletnek van R_a-beli u megoldása, akkor az operátor egy függvény. Két operátor $\frac{a_1}{b_1}$ és $\frac{a_2}{b_2}$ egyenlő egymással, ha $a_1 * b_2 \equiv a_2 * b_1$. Egy $\frac{a}{b}$ operátort alkalmazva egy c függvényre általában ismét operátort kapunk (speciális esetben függvényt) és pedig az $\frac{a * c}{b}$ operátort.

Ha $R_a = c$, a csupán $(x-y)$-tól függő függvények osztálya, akkor az imént definiált operátorok azonosak a Mikusinszki által definiált operátorokkal. Legyen $a \in R_a$, akkor a-hoz mindig található olyan K Volterra-típusú folytonos mag (rezolvense legyen R) és egy $f \in C_1$ függvény, hogy

$$a = (\mathfrak{E} + K) * f * (\mathfrak{E} + R)$$

fennálljon, ahol $\mathfrak{E}$ jelenti a C_2 függvénytér identitás-operátorát. K tehát egy C_1-en definiált $T_K(f)$ transzformációt definiál, amely C_1-et R_a-ba viszi át. E transzformáció alapvető tulajdonsága az, hogy $T_K(f * g) = T_K(f) * T_K(g)$. Ha $a = T_K(f)$ és $b = T_K(g)$, akkor az $\frac{a}{b}$ operátornak feleltessük meg az $\frac{f}{g}$ Mikusinszki-féle operátort a következő módon: $\frac{a}{b} = \frac{T_K(f)}{T_K(g)} = T_K\left(\frac{f}{g}\right)$.

Így tehát a Mikusinszki-féle operátorszámítás a C_2-térbe áttranszformálható.

GYIRES BÉLA: *A Toeplitz-féle matrixokról.* A szerző az általa értelmezett általánosított Toeplitz-féle matrixokhoz tartozó determinánsokkal foglalkozik és egy aszimptotikus tételt mond ki, amelyből mint speciális esetek adódnak a már ezirányban ismert eredmények.

V. G. AVAKUMOVIC (Jugoszlávia): *Sajátfüggvények és Fourier-sorok kompakt sokaságokon.*

KÁNTOR SÁNDOR: *Mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvények konstrukciója.* Mikolás Miklós nemrég megjelent dolgozatában igen általános, az eddig ismert konstrukciók nagyrészét magában foglaló módszert adott mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvények konstrukciójára. E módszert bizonyos szempontból általánosítva, bizonyos szempontból speciálizálva sikerült a szóbanforgó függvények igen általános, az irodalomban fellelhető összes példát magában foglaló osztályát leírni.
Példával igazolható azonban, hogy ez a módszer nem adja az összes lehetséges ilyen függvényt. További általánosítással sikerült e függvények teljes leírása.

CSÁSZÁR ÁKOS: *Megjegyzés Geöcze Zoárd függvényéhez.* Geöcze Zoárd konstruált olyan folytonos $f(x)$ függvényt, melynek $y = f(x)$ grafikonja egyetlen (a, b) intervallumon sem rektifikálható. Kántor Sándor észrevette, hogy ez az $f(x)$ függvény sehol sem differenciálható. Az előadásban szerző megmutatta, hogy Geöcze konstrukciója oly módon általánosítható, hogy a szabadon választható paraméterek bizonyos megválasztása esetén sehol sem differenciálható folytonos függvényt (például a Geöcze-félét), más megválasztásuk esetén viszont olyan szigorúan növekvő folytonos függvényt szolgáltasson, amelynek deriváltja majdnem mindenütt 0.

Gehér László: *Folytonos függvények kiterjesztése.* Ismeretes, hogy kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények mindig kiterjeszthetők folytonosan bármely bővebb halmazra. Ezt a tételt fogjuk általánosítani általános metrikus terekre. A bizonyítás Lipschitz feltételt kielégítő függvényekkel való egyenletes approximációval történik. Nevezetesen igazak a következő tételek:

1. tétel: Bármely A metrikus téren értelmezett egyenletesen folytonos korlátos függvény egyenletesen approximálható Lipschitz-feltételt kielégítő függvényekkel.

2. tétel: Bármely A metrikus téren értelmezett egyenletesen folytonos korlátos függvény folytonosan folytatható bármely A-t tartalmazó B metrikus térben. A korlátosság feltevése elejthető.

Mikolás Miklós: *A modulfüggvények elméletéhez; általánosított Dedekind-féle összegek és zeta-függvények. Riemann* összegyűjtött munkáiban találhatók bizonyos, az elliptikus függvények elméletére vonatkozó dolgozattöredékek, amelyek *Dedekind* híressé vált „kiegészítő megjegyzéseivel" együtt jelentek meg; e munkájában Dedekind — az említett Riemann-féle gondolatokhoz csatlakozva — megmutatja a róla elnevezett

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1-e^{2\pi i m \tau})$$

függvény jelentőségét az elliptikus modulfüggvények általános elmélete szempontjából, felfedezve $\operatorname{Log}\eta(\tau)$ alaptulajdonságát, egy fontos transzformációképletet és az ún. Dedekind-féle összegek innen folyó reciprocitási tételét. Ezek az eredmények mindmáig fontos vizsgálatok alapjául szolgáltak az analízis, analitikus és algebrai számelmélet különböző területein. (Hardy-Ramanujan: a partíciók aszimptotikája; Rademacher, Whiteman, Apostol, Carlitz, Mordell, Rédei: közönséges és általánosított Dedekind-féle összegek stb.)

Az előadó két idevágó (a Math. Zeitschriftben, ill. Pac. Journal of Math.-ban 1957-ben közölt) dolgozatának eredményeit ismertette. Ezekben egyfelől a

$$\tilde{Q}(\tau, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+\omega} + \frac{1}{n-\omega} \right) \frac{e^{2\pi i n \tau}}{1-e^{2\pi i n \tau}}$$

generátorfüggvényeknek, másfelől a Dedekind-féle összegeket általánosító, újtípusú exponenciális, ill. ζ-függvényértékekkel képezett összegeknek rendszeres tárgyalását adja. $\tilde{Q}(\tau, \omega)$ residuum számítással nyert főtulajdonsága $\operatorname{Log}\eta(\tau)$ Dedekind-féle transzformációtörvényének s több, újabban talált analog függvényegyenletnek közös általánosítása; innen következik pl. (a moduláris csoport felhasználásával) egy exponenciális összegekre vonatkozó „háromtag-tétel", mely a Dedekind-féle reciprocitási tételt s annak ismert általánosításait (1950—56) mind magában foglalja.

GEOMETRIAI SZEKCIÓ

VINCZE ISTVÁN: *Felületi görbék torziójáról.* Enneper és Beltraumi egy tétele szerint valamely hiperbólikus felület egy pontjában a Gauss-féle görbület egy felületi görbe, ti. az aszimptota torziójának négyzete. Előadó rámutatott arra, hogy a középgörbület viszont egy másik felületi görbe e pontbeli görbületével egyezik, ti. az aszimptotikus irányra merőleges normálmetszet görbületével.

A továbbiakban foglalkozik a felület egy pontján átmenő bizonyos görbesereg torziójának előállításával.

SOMKÚTI LAJOSNÉ: *Az öt- és hatágú csillag egy szélsőértéktulajdonsága* Definíciók: Kössük össze egy konvex n-szög csúcsait úgy, hogy ciklikusan haladva egy csúcsot mindig kihagyunk. Az így előálló alakzat egy n-ágú csillag. Ha az alapul vett n-szög szabályos, akkor a belőle származó n-ágú csillagot is szabályosnak nevezzük. Affin szabályos az n-ágú csillag, ha egy szabályosnak affin képe.

Egy sehol sem negatív görbületű zárt görbét, amelynek összgörbülete 4π, vagy egy konvex görbepárt kettősoválisnak nevezünk. Ha egy olyan kettősoválist rajzolunk, amelyen n kettőspont van, akkor n-„hold" keletkezik. A holdak belső ívei által határolt síkrészt a kettősoválís magjának nevezzük. Vegyünk fel a magban egy pontot; az e pontból kiinduló rádiuszvektor végpontja fussa be a kettősoválist. A kettősoválís területén a rádiuszvektor által súrolt síkrész területét értjük — a kétszeresen súrolt síkrészeket kétszeresen számítva.

Fejes Tóth Lászlónak az előadás kiindulási pontját képező sejtése a következőképpen hangzik:

az $n \geqq 5$ kettősponttal bíró, adott területű kettős oválisok közül az affin szabályos n-ágú csillag az, amelyen a minimális területű hold területe maximális. Az előadásban bebizonyítjuk ennek a sejtésnek a helyességét az $n = 5$ és 6 esetben.

OBLÁTH RICHÁRD: *A háromszög Feuerbach érintőjének teljes négyoldaláról.* Előadó a háromszög 4 Feuerbach konfigurációjával foglalkozott, főleg a két tétellel, hogy a 4 Feuerbach érintő a Steiner-féle ellipszist is érinti és hogy a Feuerbach érintők teljes négyoldalának Newton—Gauss egyenese azonos a háromszög Euler egyenesével.

GYARMATHI LÁSZLÓ: *Szerkesztések a komplexegyenes projektív-geometriájában.* A komplexegyenes projektivitásán a $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$, az antiprojektivitásán pedig a $z' = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ kölcsönösen egyértelmű önmagára való leképezését értjük. A transzformációs egyenletekre fennáll az $ad - bc \neq 0$ összefüggés, továbbá a z közönséges komplex szám a komplex egyenes egy pontjának a koordinátája, $\bar{z}$ a z konjugáltja és komplexegyenesnek egyetlen végtelentávoli pontja van. A szóbanforgó szerkesztések a komplexszámsíkon történnek.

Az előadás egységes szerkesztést mutat be a projektivitás és az antiprojektivitás megfelelő elemeinek meghatározására. Ugyancsak szerkesztési eljárást ad az involúciók és a projektivitások kettőspontjainak előállítására. Az utóbbi esetben azon involúció alkalmazására kerül sor, amelyet a szóbanforgó projektivitás önmagába visz át.

MATEMATIKAI LOGIKA ÉS MATEMATIKAI GÉPEK ELMÉLETE SZEKCIÓ

ROMAN SIKORSKI (Varsó): *A Herbrand-féle tételről.* Legyen α az állításkalkulus egy formulája és legyen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ az annak megfelelő kvantorok nélküli Herbrand-féle formulák egy sorozata. Előadó megjegyzi, hogy a Herbrand-féle tétel azon része, amely kimondja, hogy „ha α levezethető, akkor az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ formulák valamelyike ugyancsak levezethető" egy egyszerű következménye Borel kompakt terekre vonatkozó topológiai tételének, valamint Rieger egy tételének, amely a Lindenbaum-féle algebra reprezentációjára vonatkozik.

SURÁNYI JÁNOS: *Újabb eredmények az eldöntésprobléma elméletéhez.* Vázlatosan ismertette az eldöntés probléma redukciójára vonatkozó eddigi vizsgálatokat. Néhány újabb eredmény és egyszerűsített bizonyítás segítségével sikerült meglehetősen áttekinthetővé tenni az ilyen irányú eredményeket.

PÉTER RÓZSA: *A rekurzív függvények és a konstruktivitás fogalma.* Már a rekurzív függvény fogalmának keletkezésében a konstruktivitás fogalma volt döntő. A bevezetett speciális rekurzív definíciók kétségtelenül konstruktívok. Az általános rekurzív függvények bevezetésekor a főcél éppen a konstruktivitás fogalmának szabatos megfogalmazása volt. Ebből a szempontból azonban circulus vitiosus rejlik az általános-rekurzív függvény definíciójában, minthogy lényeges része egy exisztenciaállítás, amelyet természetesen ugyancsak konstruktív értelemben kell felfogni, hogy a definíció konstruktív legyen. Így felvetődik a probléma, hogy nem lehetne-e egy circulus-mentes „konstruktív" függvényfogalmat iktatni a speciális rekurzív függvényfogalmak és az általános-rekurzív függvényfogalom közé.

De bárhogyan is kíséreljük ezt meg, mindig hasonló circulus vitiosusba ütközünk. Ugy látszik, hogy a konstruktivitás fogalma egyáltalán nem ragadható meg circulus-mentesen.

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI SZEKCIÓ

PRÉKOPA ANDRÁS: *A másodlagos folyamatok elméletéről.* Legyen X egy absztrakt tér és $\mathfrak{S}$ az X halmaz bizonyos részhalmazaiból alkotott σ-gyűrű. Feltesszük, hogy az X térben adva van egy véletlen ponteloszlás, másszóval az X tér véges sok elemének egy véletlenszerű kiválasztása. Jelölje $\xi(A)$ $(A \in \varphi)$ az A halmazban lévő „véletlen pontok" számát. Feltesszük, hogy minden $A \in \varphi$ halmazra $\xi(A)$ valószínűségi változó és ha $A_1, \ldots, A_r$ az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű diszjunkt halmazai, akkor a $\xi(A_1), \ldots, \xi(A_r)$ valószínűségi változók függetlenek. Végül létezik egy olyan, $\mathfrak{S}$ elemein értelmezett λ véges mérték, hogy

$$P(\xi(A) = k) = \frac{\lambda^k(A)}{k!} e^{-\lambda(A)} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

Az X tér minden „véletlen pontja" kiinduló pontja egy további véletlenszerű történésnek, amely egy Y tér elemeinek véletlenszerű kiválasztásában áll. Az Y tér szintén absztrakt, amely a gyakorlati problémákban vehető Banach-térnek. Az Y tér elemeinek a kiválasztása egy $\mu(B, x)$ valószínűségi mérték szerint történik, ahol $x \in X$ a másodlagos történés kiindulópontja, B pedig eleme egy az Y térben értelmezett $\mathfrak{T}_\sigma$-gyűrűnek.

Az egész másodlagos jelenség jellemezhető a $Z = X \times Y$ szorzattér (x, y) pontjainak véletlenszerű kiválasztásaival. Ekkor a Z térben is egy Poisson típusú véletlen pontelosztást kapunk és ha $\eta(c)$ jelenti a Z tér $c\,(c \in v = \mathfrak{S} \times \mathfrak{T})$ halmazában lévő pontok számát, akkor

$$P(\eta(c) = k) = \frac{\nu^k(c)}{k!} e^{-\nu(c)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ahol ν olyan véges mérték, amelynek értékét a $C = A \times B$ $(A \in \mathfrak{S}, B \in \mathfrak{T})$ típusú halmazokon a

$$\nu(c) = \int_A \mu(B, x)\, d\lambda$$

integrál oldja meg.
A másodlagos „folyamatoknak" ez a modellje számos gyakorlati problémára alkalmazható.

Balogh Tibor: *Határeloszlás-tételekről.* A Kolmogorov-féle valószínűségi mező olyan általánosításának lehetőségéről tesz említést, amelyben a valószínűség szerepét speciális matrixok veszik át. Vizsgálta az ilyen határeloszlás-tételeket.

Medgyessy Pál: *Néhány eredmény sűrűségfüggvény-keverékek felbontásával kapcsolatban.* Legyen $f^*(x) = \sum_{k=1}^{N} A_k f_k(x)$ az $f_k(x)$ stabilis sűrűségfüggvények $A_k > 0$ súlyokkal vett keveréke $\left(\sum_{k=1}^{N} A_k = 1\right)$

$$\left(\text{tehát: } f_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{i\gamma_k t - c_k |t|^{\alpha} \{1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)\}} dt\right.$$

$$(0 < \alpha \leqq 2,\ |\beta| \leqq 1,\ \gamma_k,\ c_k > 0 \text{ konst.})\ \omega(t, \alpha) = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{\alpha}{2}\right) \text{ ha } \alpha \neq 1;$$

$$\left.\omega(t, 1) = \frac{2}{\pi} \log |t|\right).$$

Feladat: meghatározni pusztán $f(x)$ grafikonja és α, β — tehát az $f_k(x)$-ek típusa ismeretében legalább is az A_k paramétereket és az N kompenensszámot. A feladat megoldottnak tekinthető, ha a $0 < \lambda < \min c_k$ egyébként tetszőleges λ paraméterrel elő tudjuk állítani az

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} A_k \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{i\gamma_k t - (c_k - \lambda)|t|^{\alpha} \{1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)\}} dt\right)$$

függvényt. ($\Phi(x, 0)$ nyilván $= f(x)$.) Az ismertetésre kerülő módszer a következő:

$\Phi(x, \lambda)$ racionális α esetén — bizonyos feltételek mellett — lineáris parciális differenciálegyenletnek, a $0 < \alpha < 1$ ill. $1 < \alpha < 2$ feltételeknek eleget tévő, különben tetszőleges α esetén pedig egy lineáris integro-differenciálegyenletnek tesz eleget. Ezeknek a felhasználásával $f(x)$ és λ ismeretében $\Phi(x, \lambda)$ numerikus ill. analitikus módszerekkel jó közelítéssel előállítható. — Példák: Gauss, Cauchy és Pearson V. típusú sűrűségfüggvény keverékek felbontása.

Lipták Tamás: *Független szignifikancia-próbák összevonásáról.* Ha valamely statisztikai hipotézis elvetését attól teszik függővé, hogy egy bizonyos statisztikai függvény aktuális értéke meghalad-e egy (a vizsgálat megbízhatósági szintjétől függő) kritikus értéket, akkor a kialakult gyakorlat szerint nemcsak a hipotézis elvetését (vagy elfogadását) konstatálják, hanem megadják egyben azt a legkisebb szintet, amely mellett még a hipotézist el lehet vetni (az eredményt „szignifikánsnak" lehet minősíteni). A szokásos próbáknál e „minimál-szint" a nullhipotézis érvényessége esetén egyenletes eloszlású (0, 1)-ben, míg torzítatlan próbáknál még az is igaz, hogy bármely alternatív hipotézis érvényessége esetén e minimál-szint eloszlásfüggvénye mindenütt nagyobb vagy egyenlő, mint az egyenletes eloszlásfüggvény. Ha ugyanazon tárgyban több, egymástól független próbát végzünk, gyakran kellene ezen próbák minimál-szintjeit egyetlen szintté összevonni. E probléma egyenértékű egy hipotézis-vizsgálattal, amelynél a mintaelemek nullhipotézis esetén egyenletes eloszlásúak, ellenkező esetben pedig az egyenletesnél nagyobb vagy vele egyenlő eloszlásfüggvénnyel rendelkeznek.

Az előadó a középértékek Nagumo-féle jellemzésének alkalmazásával kimutatta, hogy néhány célszerű korlátozás elfogadása esetén az összevonásoknál elegendő az egyes szintek (súlyozott) középértékeire szorítkozni. A *R. A. Fisher* által ajánlott geometriai közép helyett az előadó az inverz normális eloszlásfüggvény szerinti közepet javasolta, amelynek eloszlása egyszerű és könnyen meghatározható a súlyozott esetben is. Ha az egyes próbáknak $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ súlyt tulajdonítunk ($\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_r > 0$;) akkor ezen összevonás alapján az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ szintekből nyert összevont minimál-szint:

$$\text{(x)} \quad \bar{\varepsilon} = \Phi\left(\frac{\lambda_1 \Phi^{-1}(\varepsilon_1) + \cdots + \lambda_r \Phi^{-1}(\varepsilon_r)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_r^2}}\right), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Ha nem adható meg elég objektív módon az egyes problémák megbízhatósági súlya, egyenlő súlyokat vehetünk. (A súlyok megállapítására elég megbízható eljárás az, hogy azokat az egyes kísérletekben szereplő megfigyelések számának négyzetgyökével arányosnak választjuk. Ebben az esetben a (x) képletben a λ_i-k helyett egyszerűen $\sqrt{n_i}$-et kell írni.)

OKTATÁSI SZAKOSZTÁLY ELŐADÁSAI

Késedi Ferenc: *Középiskolai matematika tanításunk jelenlegi helyzete és problémái.*

Arató István: *A mérés szerepe és jelentősége a mennyiségtan tanításban.*

Bakos Tibor: *A számoló- és ábrázolómértan kapcsolatáról.*

1957. szeptember 22., vasárnap:

PLENÁRIS ÜLÉSEK

ALEXITS GYÖRGY: *Ortogonális sorok konvergencia tulajdonságairól.* Az előadó összefoglalta az ortogonális sorok konvergencia-problémái tárgyában elért újabb magyar eredményeket, melyek elsősorban Tandori Károlynak és részben az előadónak köszönhetők. Ezekkel kapcsolatban az előadó több megoldásra váró problémát vetett fel.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Hilbert-tér operátoraira vonatkozó néhány újabb eredményről.* Legyen $T(s)$ egy G csoporton értelmezett függvény, amelynek értékei egy $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér operátorai. A $K(s,t)=T(t^{-1}s)$ „magfüggvény" legyen pozitív definit. Ekkor létezik egy $\mathfrak{K}\supseteq\mathfrak{H}$ Hilbert-térben a G csoportnak egy olyan, unitér operátorokkal való előállítása, amelyre

$$T(s)=\mathrm{pr}\,U(s)$$

(azaz $T(s)f=PU(s)f$, ahol $f\in\mathfrak{H}$, P pedig a $\mathfrak{H}$-ra való vetítés). Ha megkívánjuk, hogy a $\mathfrak{H}$ tér „minimális" legyen, azaz az $U(s)f$ ($f\in G$) alakú elemek kifeszítsék, akkor $U(s)$ egyértelműen van meghatározva.
Alkalmazásként adódik egy T kontrakcióra a

$$T^n=\mathrm{pr}\,U^n \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

előállítás egy unitér U transzformációval, ill. két (vagy több), „duplán" felcserélhető T, T' kontrakcióra a

$$T^n T'^m=\mathrm{pr}\,U^n U'^m \qquad (n,m=0,1,\ldots)$$

előállítás két, felcserélhető unitér U, U' operátorral, továbbá a

$$T(s)=\mathrm{pr}\,U(s) \qquad (s\geqq 0)$$

előállítás egy kontrakciókból álló, gyengén folytonos $T(s)$ félcsoportra egy unitér operátorokból álló, erősen folytonos $U(s)$ csoporttal. Ismertette az előadás továbbá *Brehmer* eredményeit a csupán felcserélhető T, T' párok esetére, és *Schreiber* és *Sz.-Nagy* tételeit a szigorú értelemben kontraháló operátorokra ($\|T\|<1$), ill. félcsoportokra vonatkozólag.

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET SZEKCIÓ

RÉDEI LÁSZLÓ: *A háromszög nevezetes pontjai.* Már az ókorban ismeretesek voltak a háromszögnek bizonyos „nevezetes pontjai" (súlypont, magasságpont, körülírt kör középpontja), amelyekhez később további, mintegy húszféle nevezetes pont lépett, anélkül, hogy megtörtént volna a háromszög nevezetes pontjai fogalmának általános megalapozása. Az előadás felállít általános elemi geometriai definíciót a háromszög nevezetes pontjaira és ennek alapján analitikus úton meghatározza a háromszög összes nevezetes pontjait. Jóllehet az alapul vett definíció igyekezett lehető szűkre szabni a háromszög nevezetes pontjainak fogalmát, természetesen annak szemmeltartásával, hogy klasszikus esetek ne menjenek veszendőbe, mégis meglepetésként kiderül, hogy bármely háromszög összese nevezetes pontjai a háromszög síkjában mindenütt sűrűn helyezkednek el.

MAURER GYULA (Kolozsvár): *Topologizált monomiális csoportok normálosztóiról.* A

$$P(G) = P \times \{G\}$$

Descartes-féle szorzat csoportot alkot az

$$(a\,;\pi)\,(b\,;\varrho) = (a\,b_\pi\,;\pi\varrho)$$

műveletre nézve; ezt teljes monomiális csoportnak nevezzük. Itt P-vel jelöltük a $0, 1, 2, \ldots, \xi, \ldots$ $(\xi < \varphi)$ rendszámok M halmaza (számosságuk $\aleph_\nu$) összes lehetséges permutációinak csoportját, φ ezen sorozat típusát jelöli, G egy tetszőleges absztrakt halmaz és $\{G\}$ az összes

$$a = \{a_\xi\} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots\}$$

sorozatok halmaza, ahol $a_\xi \in G$ (a sorozat tagjai egyenlők is lehetnek) és végül $a\,b_\pi = \{a_\xi\, b_{\pi(\xi)}\}$.

Egy $\{\pi_r\}_{r<\omega}$ $(\pi_r \in P)$, illetve $\{a^{(r)}\}_{r<\omega}$ $(a^{(r)} \in \{G\})$ végtelen sorozat határértéke $\pi \in P$, illetve $a \in \{G\}$, ha minden $\xi \in M$-re létezik olyan R_ξ természetes szám, hogy $r > R_\xi$-re $\pi_r(\xi) = \pi(\xi)$, illetve $a_\xi^{(r)} = a_\xi$ (ω az első másodosztályú rendszám). $P(G)$-ben limesfogalom vezethető be

$$\lim_{r<\omega}\,(a^{(r)}\,;\pi_r) = (\lim_{r<\omega} a^{(r)}\,;\,\lim_{r<\omega} \pi_r)$$

segítségével és bizonyítható, hogy $P(G)$ topológikus csoport.

Jelölések: P_ν azon $\pi \in P$ elemek összessége, amelyekre $\pi(\xi) \neq \xi$ M-nek csak egy részhalmazára teljesül és amelyek számossága $\aleph_\nu$-nél kisebb, ahol ν $(0 \leqq \nu \leqq \mu)$ vagy egy tetszőleges elsőfajú rendszám, vagy pedig egy olyan másodfajú tetszőleges rendszám, mely nem határértéke egy ω-típusú sorozatnak; $E = \{\varepsilon\}$, ahol ε a P csoport egységelemét jelöli, $E(c)$ a $P(G)$ csoport $(c\,;\varepsilon)$ alakú elemeinek összessége, ahol $C = \{c, c, \ldots, c, \ldots\}$ és C a G csoport centrumához tartozik.

Tétel: A $P(G)$ topologikus csoport normálosztói $P(G)$-nek csakis azon részhalmazai lehetnek, amelyek $P_\nu(G)$, $E(N)$ vagy $E(C)$ alakúak.

Megjegyzések: 1. A monomiális csoportok topologizálásának jelentősége az absztrakt csoportok monomiális reprezentációjának lehetőségén alapszik. Ilymódon egy eljáráshoz jutunk absztrakt csoportok topologizálására.

2. ν elsőfajú rendszám, ha van megelőzője (azaz, olyan α, hogy $\alpha + 1 = \nu$); ellenkező esetben másodfajú.

3. N jelöli a G csoport egy tetszőleges normálosztóját, $E(N)$ jelöli az $(n\,;\varepsilon)$ alakú elemek összességét, ahol $n \in \{N\}$, tehát $n = \{n_1, n_2, \ldots, n_\varepsilon, \ldots)$, ahol $n_\xi \in N$.

FRIED ERVIN: *Megjegyzések a feloldhatóság problémájához.* Legyen a K test karakterisztikája $\chi = p$ prímszám és L a K-nak p-edfokú normális bővítése. Ekkor $L = K(\vartheta)$ — ahol ϑ az $f(x) = x^p - x + a$ polinom gyöke $(a \in K)$. Fordítva, ha $L = K(\vartheta)$, $\chi_k = p$, és ϑ az $f(x) = x^p - x + a$ $(a \in K)$ gyöke, akkor $[L : K] = p$ és L a K-nak normális — így ciklikus — bővítése. Nevezzük a fenti $f(x)$ polinom gyökeit kváziradikálnak; kváziradikálkifejezésnek — K felett —, pedig egy olyan kifejezést, melyben K-nak véges sok eleme, véges sok racionális művelet, radikál ($x^q - a$ gyöke, $\chi_k \neq q$ esetben) és kváziradikál szerepel.

Ekkor érvényes a következő tétel: Ha egy $g(x)$ — K felett irreducibilis — polinom egyik gyöke kváziradikálkifejezés, akkor a hozzátartozó Galois-csoport feloldható, és ha a $h(x)$ Galois-csoportja feloldható, akkor minden gyöke kváziradikálkifejezés. (A tétel karakterisztikakorlátozás nélkül érvényes.)

Kertész Andor: *Algebrailag zárt modulusok.* Egy G R-modulust algebrailag zártnak nevezünk, ha bármely G feletti egyismeretlenes kompatibilis egyenletrendszer G-ben megoldható. E modulus-kategóriával kapcsolatban alapvető a következő probléma: legyen R tetszőleges gyűrű, meghatározandó az összes algebrailag zárt R-modulus. E problémával foglalkozva az előadó leírja az összes olyan G algebrailag zárt R-modulust, amelyre $RG = 0$.

Szép Jenő: *Csoportok egy újabb bővítéséről.*

Papp Zoltán: *A bázis-alcsoport lezártjáról.* Bebizonyítjuk, hogy egy Abel-féle p-csoport akkor és csak akkor olyan tulajdonságú, hogy direkt összeadandó minden olyan Abel-féle p-csoportban, amely szerváns részcsoportként tartalmazza, ha egy algebrailag zárt csoportnak és bázis alcsoportjai lezártjának direkt összege. Végtelen magasságú elemet nem tartalmazó csoportok esetében ebből L. Kulikov egy régebbi eredménye adódik, s a bizonyítás erre a speciális esetre is egyszerűbb Kulikovénál.
Tetszőleges Abel-féle torziócsoportok esetére az eredmény könnyen kiterjeszthető.

Kovács László: *Abel-féle torzió-csoportok bázis alcsoportjairól.* A bázis-alcsoport egy új jellemzéséből kiindulva bebizonyítjuk, hogy egy tetszőleges G Abel-féle p-csoport valamely H alcsoportja akkor és csak akkor van benne G egyik bázisalcsoportjában, ha H előállítható (G-ben) korlátos magasságú alcsoportok növő láncának egyesítési halmazaként. E tételből alkalmazásként adódik Kulikov ciklikus csoportok direkt összegeként való előállíthatóságra vonatkozó kritériuma.

ANALÍZIS SZEKCIÓ

Tandori Károly: *Ortogonális sorok szummációja.* D. Mensov eredményeit élesítve bebizonyítja a következő tételeket:

Legyen $\{c_n\}$ *pozitív számsorozat, amelyre teljesülnek a* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$, $\sqrt{n}\, c_n \geqq \sqrt{n+1}\, c_{n+1}$ *feltételek. Ekkor a* $\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty$ *feltétel nemcsak elegendő, hanem szükséges is ahhoz, hogy a* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ *sor bármely* $\{\varphi_n(x)\}$ *ortonormált függvényrendszer esetén az alapintervallumon majdnem mindenütt* $(C, 1)$*-szummálható legyen.*

Továbbá kimutatja, hogy Alexits György akadémikus egyik szummálhatósági feltétele általában nem gyengíthető. Érvényes ugyanis a következő tétel:

Legyen $\{w(n)\}$ *pozitív számsorozat, amelyre teljesül a*

$$\sqrt{n} = o(w(n))$$

feltétel. Ekkor megadható olyan pozitív, monoton nem-növő $\{c_n\}$ együttható-sorozat és olyan ortonormált $\{\Phi_n(x)\}$ függvényrendszer, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{w(n)} < \infty,$$

mégis a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$ *sor az alapintervallumon seholsem* $(C, 1)$*-szummálható.*

FREUD GÉZA: *A Csebisev-féle approximáló polinomok egy tulajdonságáról.* Legyen $f(x,t)$ $[a,b) \times [c,d]$-ben folytonos két változós függvény és $\Phi(x,t)$ az az x-ben n-edfokú polinom, amely rögzített t mellett f-et $[a,b]$-ben a C tér normájában legjobban approximálja. Akkor $\Phi(x,t)$ a t-nek folytonos függvénye.

FREY TAMÁS: *Néhány eredmény az ortogonális polinomok elméletéből.* A legfontosabb eredmények az alábbiakban foglalhatók össze: Legyen $\varphi(t) \in L_{2\pi}$ nemnegatív, az egységkörön értelmezett súlyfüggvény, amelynek logaritmusa is integrálható, a hozzá tartozó normált $\{\Phi_n(z)\}$ polinomsorozat pedig, rendelkezzék a $z_0 = e^{it_0}$ pontban aszimptotikával. A $\psi(t) \in L_{2\pi}$ súlyfüggvény a t_0 pontban érintse $\varphi(t)$-t másod, ill. — amennyiben a $\sqrt{\varphi(t)}\,|\Phi_n(e^{it})|$ sorozat a t_0 pont egy környezetében összességében egyenletesen korlátos — elsőnél magasabb rendben. φ és ψ ezenkívül csak néhány igen általános globális feltételt elégítsen ki. A $\psi(t)$ súlyhoz tartozó $\{\psi_n(z)\}$ ortonormált polinomsorozat ezesetben szintén rendelkezik aszimptotikával a z_0 pontban. Amennyiben fentieket speciálisan a $\varphi \equiv 1$ súllyal kapcsolatosan tekintjük, akkor Freud G. néhány, doktori értekezésében publikált eredménye adódik, az ottaninál azonban lényegesen általánosabb globális feltételek mellett. Ebben a speciális esetben azonban a lokális feltételek is lényegesen enyhíthetőek, nevezetesen: a $\{\psi_n(z)\}$ ortonormált polinomsorozat a $z_0 = e^{it_0}$ pontban aszimptotikával rendelkezik, ha a $\psi(t)$ súlyfüggvény e pontban a $\psi(t_0)$ állandóhoz egykettednél, ill. — ha a $\sqrt{\psi(t)}\,|\psi_n(e^{it})|$ sorozat a t_0 pont egy környezetében összességében egyenletesen korlátos — egynél nagyobb exponensű logaritmikus rendben simul.

PÁL LÁSZLÓ: *Egy sorelméleti problémáról.* Tekintsük az $1, 2, 3, \ldots$ természetes számoknak ismétlődés nélküli $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ permutációból álló halmazát, melyet tekintsünk metrikus térnek az ún. Fréchet-féle távolság bevezetésével, miszerint

$$\varrho(P,Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|p_k - q_k|}{1 + |p_k - q_k|}.$$

Állíthatjuk, hogy az így kapott T szeparabilis és topologikus értelemben teljes térben egyszerűen megadható olyan M halmaz, amely egyidejűleg rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

1. M egyesítése megszámlálhatóan végtelen sok T-ben seholsem sűrű halmaznak.

2. M egyesítése kontinuum sok a T-ben mindenütt sűrű halmaznak, melyek páronként diszjunktak. Legyen ugyanis megadva egy Σa_n feltételesen kon-

vergens valóstagú végtelen sor. Ha tekintjük e sor valamely

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_3} + \cdots$$

átrendezését, úgy ehhez (kölcsönösen egyértelműen) hozzárendelhetjük a T terünknek a jelenlegi tagindexek által „generált"

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

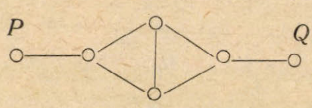
pontját, Mármost az előadásban előadó megmutatta, hogy a Σa_n sor összes lehetséges konvergens átrendezéseihez ilyenmódon hozzárendelt P pontok M halmaza az állításban leírt tulajdonságú.

MATEMATIKAI LOGIKA ÉS MATEMATIKAI GÉPEK ELMÉLETE SZEKCIÓ

DÖMÖLKI BÁLINT: *Jelfogó-érintkezőrendszerekkel reprezentálható eseményekről.* A véges automaták elméletére vonatkozó alapfogalmak ismertetése után az előadó megmutatta, hogy minden véges automatához (és gyakorlatilag a legtöbb létező szerkezet ennek tekinthető) elkészíthető egy „modell" jelfogók és érintkező-kapcsolók bizonyos mértékben idealizált rendszere segítségével, amely ugyanazokat a funkciókat tudja ellátni, mint az eredeti. Ezután megadja az események reprezentálhatóságának egy szükséges és elegendő feltételét, majd felveti a kérdés algebrai tárgyalásának lehetőségét és néhány ezzel kapcsolatos megoldatlan problémát.

TURÁNNÉ SÓS VERA: *Hozzászólás Kalmár László egy kérdéséhez.* Az előadás tárgya egy olyan tárcsa konstrukciója, amelynek nP_n számú különböző helyzete előállítja az n elem összes lehetséges partícióit, ahol P_n ezen partíciók száma.

ÁDÁM ANDRÁS: *Elektromos hálózatokkal kapcsolatos gráfelméleti problémákról.* Két pólust összekötő elektromos hálózat szerkezete egy véges gráf, amely bizonyos feltételeknek eleget tesz. Gráfon mindig véges gráfot értünk, amelyben kitüntetünk egy pontot, mint a gráf kezdőpontját, és egy pontot, mint a gráf végpontját. Útnak nevezzük pontok és élek egy váltakozó sorozatát, amely ponttal kezdődik és végződik, amelyben ugyanaz a pont nem fordul elő kétszer, és amelyben bármely él a sorozatban őt megelőző pontot köti össze a sorozatban őt követő ponttal. Ha egy út kezdőpontja éppen a gráf kezdőpontja, végpontja pedig a gráf végpontja, akkor pályáról beszélünk. Az említett feltétel a következő: megkívánjuk, hogy a gráf bármely pontján menjen át a pálya.
Két gráf sorbakapcsolását és párhuzamos kapcsolását értelmezve könnyen belátható, hogy minden gráf előállítható e két kapcsolási eljárás ismétlésével oly gráfokból, amelyek irreducibilisek mind a soros mind a párhuzamos kapcsolásra nézve.
Kettős élnek nevezünk egy élt, ha „mindkét irányban" átmegy rajta egy-egy alkalmas pálya.



Egy gráf valamely két útjáról azt mundjuk, hogy a Wheatstone-híd módján csatlakoznak egymáshoz, ha páronként közös belső pont nélküliek, és az ábrán látható módon helyezkednek el (P-vel a gráf kezdőpontját Q-val végpontját jelöltük. A P-ből és Q-ból kiinduló két út eltünhet.) A főeredmény a következő három gráf-osztály egybeesését mondja ki: (A) azok a gráfok, amelyek nem állíthatóak elő P ○———○ Q alapelemből soros és párhuzamos kapcsolással. (B). Azok a gráfok, amelyek tartalmaznak kettős élt. (C). Azok a gráfok, amelyek tartalmaznak Wheatstone-híd módján csatlakozó utakat.

Bakos Tibor: *Jelfogók állapotváltozásával kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről.* A szegedi 8-változós elektromos logikai gép céljára szükséges volt az 1 és 0 elemek (igaz és hamis) valamennyi 8-tagú ismétléses variációjának olyan felsorolására, amely bizonyos technikai és egyszerűségi követelményeknek is eleget tesz. Az előadás megmutatja, hogy a követelményeknek megfelelő felsorolás akárhány változó esetére lehetséges.

OKTATÁSI SZAKOSZTÁLY ELŐADÁSAI

Gádor Endréné: *A matematika órák jobb kihasználása.*

Hódi Endre: *A középiskolai matematika néhány érdekesebb alkalmazása.*

PLENÁRIS ÜLÉSEK

1957. szeptember 23., hétfő:

Varga Ottó: *Újabb eredmények a differenciálgeometriai terek elméletéből.* A Riemann-féle geometriában, valamint az affinösszefüggő terekben a differenciálinvariánsok teljes rendszerének meghatározása T. Y. Thomas és O. Veblen nevéhez fűződik.
Előadó a problémát Finsler-féle, illetve affin-összefüggő vonalelemterek esetére oldotta meg 1950-ben. A legfontosabb segédeszköz az un. kvázigeodetikus görbék segítségével meghatározott általánosított Riemann-féle normálkoordinátarendszer bevezetése volt. Rapcsák András 1954-ben megmutatta, miként általánosítható a Finsler-féle terek esetén követett módszer úgy, hogy a Cartan-féle tér differenciálinvariánsai is meghatározhatók legyenek.

Előadó 1957-ben a Finsler, illetve Cartan-féle terek esetén kidolgozott módszert Kawaguchi-féle terekre általánosította. Ennek alapján sikerült általánosított normálkoordinátákat bevezetni és segítségükkel a differenciálinvariánsok meghatározását a projektív invariánsok felkutatására visszavezetni.

Fuchs László: *A Hajós-tétel kiterjeszthetőségéről végtelen csoportokra.* Ha G véges Abel-csoport és $G = S_1 + \ldots + S_k$ direkt felbontása G-nek $S = [0, a, 2a, \ldots, (p-1)a]$ alakú komplexusokra, akkor Hajós tétele szerint valamelyik S_i szükségképpen csoport. Kétféle általánosítási lehetőségre lehet gondolni végtelen csoportok esetén: 1) megtartva az S komponensek alakját, megengedjük azt, hogy G végtelen sok S_i direkt összegeként áll elő, 2) ragaszkodva a komponensek véges számához, S_i gyanánt bizonyos végtelen komplexusok is szóbajöhetnek.

Az 1) esetben az előadó majdnem teljes leírását adja azon Abel csoportoknak, amelyekre Hajós tétele érvényben marad: Prüfer típusú alcsoportot nem tartalmazó G csoportra akkor és csakis akkor igaz Hajós tétele, ha

$G = H + K$ alakú, ahol H véges csoport és K tetszőleges számosságú, azonos primszámrendű ciklikus csoport direkt összege.

A 2) esetben nevezzük az S komplexust gyengén periodikusnak, ha létezik oly g csoport-elem, hogy S és $g+S$ mindegyik legfeljebb egy, a másikhoz nem tartozó elemet tartalmaz, és periódikusnak, ha $S = g + S$. Hajós tételének következő általánosítása igaz: ha $G = S_1 + \ldots + S_k$ a G tetszőleges Abel-csoport felbontása véges-sok gyengén periodikus komplexus direkt összegére, akkor az S_i-k egyike periodikus. (Véges G esetén ez ekvivalens a Hajós-tétellel.)

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLETI SZEKCIÓ

TURÁNNÉ SÓS VERA: *Diofantikus approximációról.*

A lánctörtek egy geometriai interpretációja által megadható a lánctörteknek egy, a diophantikus approximáció inhomogén esetére is alkalmazható kiterjesztése. Az előadásban ennek vázolása után ismertetve vannak ezen geometriai interpretációból kiindulva nyerhető egyes új eredmények, így pl. a homogén esetben A. Ostrowski egy kérdésének megoldásaként $\sum_{n=1}^{N} (n\alpha) - \frac{N}{2}$ egyoldali korlátosságának lehetősége, az inhomogén esetre vonatkozólag az $\inf_{\alpha} \sup_{\beta} \min_{y} x|\alpha x - \beta - y|$-ra ($x > 0$, y egészek).

SZŰSZ PÉTER: *Az inhomogén diofantikus approximáció elméletéhez.* Az előadás a következő két tétel bizonyítását tartalmazta:

1. tétel: Legyen β tetszőleges valós szám, $f(x)$ olyan folytonos függvény, hogy $xf(x)$ növekedő x-szel valamely x_0-től kezdve monoton csökken. A $|\alpha x + \beta + y| < f(x)$ egyenlőtlenségnek majdnem minden α-ra aszerint van véges sok vagy végtelen sok egészszámú megoldása ($x > 0$), hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ sor konvergens, vagy divergens.

E tétel Hincsin egy tételének általánosítása. Hincsin tétele (Math. Annalen 92/1924) a $\beta = 0$ speciális esetre vonatkozik.

2. tétel. Legyen $g(x)$ növekvő x-szel monoton csökkenő függvény. Akkor létezik oly irracionális α, hogy a $|\alpha x + \beta + y| < \frac{g(x)}{x}$ egyenlőtlenségnek majdnem minden β-ra csak véges sok megoldása legyen, ahol x természetes szám és y egész szám.

ŠT. SCHWARZ: (Csehszlovákia): *Modulo m maradékosztályú multiplikatív félcsoportok struktúrájáról.*

POLLÁK GYÖRGY: *Euklidesi értékelésekről.*

Nevezzünk euklidesi gyűrűnek egy R gyűrűt, ha létezik elemeinek egy olyan $\varphi(a)$ leképezése egy hézagtalan rendszámhalmazra, hogy ha $a, b \in R$, $b \neq 0$, akkor

$$\varphi(a) = \varphi(ae), \text{ ha } e \text{ egység} \tag{1}$$

$$\text{van olyan } q \in R, \text{ hogy } \varphi(a - bq) = \varphi(b). \tag{2}$$

A φ leképezést euklidesi értékelésnek nevezzük.

1. Tétel: Minden R euklidesi gyűrűnek van egy φ_0 *minimális értékelése,* melyre teljesül

$$\varphi_0(a) \leqq \varphi(a)$$

minden $a \in R$-re és minden φ értékelésre.
A φ *értékelés típusának* nevezzük a képek halmazának rendtípusát.
2. Tétel. A racionális egész számok gyűrűjének minden értékelése $\omega \cdot n$ típusú $(0 < n \leqq \omega)$
Test feletti polinómgyűrű össze értékeléstípusai is megadhatók.
3. Tétel. Ha az R euklidesi gyűrű minden nemtriviális faktorgyűrűje véges, akkor R-nek van ω-típusú euklidesi értékelése.

Szendrei János: *A ferdeszorzat egy alkalmazása a gyűrűelméletben.*
Két gyűrűnek olyan ferdeszorzata adható meg, amely speciális esetként tartalmazza az Everett-féle valamint a Szép-féle gyűrűbővítéseket. Továbbá egy másik speciális esete pedig módot nyújt a komplex számok testének, valamint a kvaterniótest egy új megkonstruálására.

Wladimir Korinek (Csehszlovákia): *Megjegyzések az un. Kaplansky-féle harmadik „Test-Problem-"hoz.*

H. Grell (Németország): *Reguláris primideálokról.*

S Knapowski (Poznan): *A Möbius-függvényről.*
Jelentse $\mu(n)$ a Möbius-féle számelméleti függvényt. Legyen $M(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n)$ és vizsgáljuk a

$$\max_{1 \leqq x \leqq T} |M(x)|$$

kifejezést $T \to \infty$ mellett.
Turán módszere segítségével $\max\limits_{1 \leqq x \leqq T} |M(x)|$-nek egy alsó becslése adható, hacsak T elég nagy. Az eredmény a következő:
Az

$$\int_1^T \left(\frac{M(x)}{x} \right)^2 dx \leqq \alpha \log T \quad (T \geqq 1, \ \alpha \text{ független } T\text{-től})$$

becslésből következik a

$$\operatorname{Max}_{1 \leqq x \leqq T} |M(x)| > T^{1/2} e^{-\frac{\log T}{\sqrt{\log \log T}}}$$

egyenlőtlenség, ahol $T > c(\alpha)$ és $c(\alpha)$ pedig egy explicit függvénye az α-nak
Érdekes módon ez utóbbi egyenlőtlenség következik a jólismert Mertens-féle hipotézisből is:

$$\max_{1 \leqq x \leqq T} |M(x)| < \sqrt{T} \qquad T > 1.$$

ANALÍZIS SZEKCIÓ

Lubomir Ilieff (Sofia): *Hatványsorok analitikus nemfolytathatóságáról.* A

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

hatványsor elégítse ki a

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$$

feltételt. Ekkor igazak a következő tételek:

1. tétel. Ha létezik olyan n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ indexsorozat és egy olyan θ $(0 < \theta < 1)$ szám, hogy fennáll a

$$\lim \sqrt[n_\nu]{|c_{n_\nu}|} = 1$$

összefüggés, továbbá a $c_{n_\nu - k}$ $(k = 1, 2, \ldots, [\theta n_\nu])$ sorozat periódikus, legalább két periódus-csoporttal és az 1 nem torlódási pontja a $\frac{c_{n_\nu - k}}{c_{n_\nu}}$ $(k = 1, 2, \ldots, [\theta n_\nu])$ számoknak, akkor a fenti hatványsor az egységkörön kívül analítikusan nem folytatható.

Legyen $\varphi(x)$ egy monoton növekvő, nemnegatív, pozitív x értékekre olymódon értelmezett függvény, hogy $\varphi(x) \leqq x$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$, $\varphi'(x)$ monoton tart 0-hoz, ha $x \to \infty$ és azonkívül létezzék egy olyan α konstans, hogy egy megfelelően választott $0 < \lambda < \lambda_0$ intervallumon belül minden λ-ra fennálljon az $x_2 < x_1^\alpha$ egyenlőtlenség, ahol x_1, illetve x_2-vel jelöltük a $\varphi'(x) = \lambda$, illetve $\varphi(x) = \lambda x$ egyenlet egyetlen gyökét.

2. tétel. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

hatványsor elégítse ki az

$$|a_n| = O(e^{\varphi(n)})$$

feltételt. Legyen továbbá megadva a n_ν indexeknek egy végtelen sorozata $(\nu = 1, 2, \ldots)$, melyekre

$$\frac{|c_{n_\nu}|}{e^{\varphi(n_\nu)}} \geqq \varDelta > 0 \quad \text{és a } c_{n_\nu - k} \quad (k = 1, 2, \ldots, [\beta \ln n_\nu])$$

sorozat egy megfelelően választott $\beta = \beta(\varphi)$ konstansra periódikus, legalább két periódus-csoporttal, ekkor a szóbanforgó hatványsor az egységkörön kívül analitikusan nem folytatható. — Hasonló eredmények nyerhetők más hatványsor-osztályokra is.

Aczél János: *Függvényegyenletekről és alkalmazásaikról.* Előadó ismertette a Birkhäuser—Verlag „Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakter Wissenschaften" sorozatában megjelenendő könyve tartalmát és vázolja néhány részletét.

Rényi Kató: *Valós hatványsorok együtthatósorozatának jelváltásairól.* Az előadó egész függvényekre vonatkozó olyan tételeket bizonyít, amelyek egyes korábbi tételeinek élesítését jelentik, amennyiben a vizsgált függvények Taylor-sorainak együtthatósorozatában a zérusok számán kívül a zérusok eloszlását és (valós esetben) a jelváltásokat is figyelembe veszi.

TURÁN PÁL: *N. Wiener egy tételének általánosításáról.* N. Wiener egy jólismert tételének általánosításakép szerző a következő tételt bizonyította be: Ha $h(x) = \sum_{n=0}^{M} A_n e^{nix}$ olyan, hogy van oly

$$(n_{-1} =)\, 0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_{N-1} < n_N = M \;(= n_{N+1})$$

indexsorozat, hogy $j = 0, 1, \ldots, N-1$-re

$$n_{j+1} - n_j > \Delta \quad (\geq 16, \text{ egész})$$

és $j = 0, 1, \ldots, N-1$, N-re

$$|A_{n_j}| > 2 \sum_{\substack{n_{j-1} < n < n_{j+1} \\ n \neq n_j}}' |A_n|,$$

akkor minden valós b-re

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2\, dx \leq 8(\Delta + 1) \int_{b - \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta+1}}}^{b + \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta+1}}} |h(x)|^2\, dx.$$

Alkalmazáskép szerző ebből egy újszerű nemfolytathatósági tételt vezetett le.

MAKAI ENDRE: *Membránok alaphangjának frekvenciájáról.* Tekintsünk egy peremén befogott membránt, melynek területe T, kerülete K, alaphangjának frekvenciája Λ. Ismeretes, hogy Λ felfogható, mint egy variációs probléma minimuma. Tekintsük ui. azokat az $u(x, y)$ függvényeket, amelyek a membrán peremén eltünnek, folytonosak, első deriváltjaik pedig szakaszosan folytonosak. Ekkor

$$\Lambda = \min_u \left[\iint_T (\text{grad } u)^2\, dT \Big/ \iint_T u^2\, dT \right]^{1/2}.$$

Igazolható, hogy tetszőleges egyszeresen összefüggő membrán esetén $\Lambda < \sqrt{3}\, K/T$. Ez az állítás igazolttá válik, ha sikerül olyan u függvényt találni, amelyet a Λ definíciójában szereplő variációs kifejezésbe helyettesítve, e kifejezés értéke $\sqrt{3}\, K/T$-nél kisebbé válik. Ilyen tulajdonságú $u = u(P)$ pontfüggvény az, amelynek a sík P pontjához tartozó értéke a P pontnak a tartomány kerülete legközelebbi pontjából mért távolsága.
Az állítás igazolása az előadáson konvex poligonális tartományokra szorítkozva történt.

BL. DOLAPTSCHIEW és BL. SENDOW (Sofia): *Egy hidrodinamikai probléma exakt megoldása.* Előadó a henger-örvénypár problémájával foglalkozott. A mozgásegyenletek zárt integrálása útján a

$$\text{(1)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= U\left(1 - \frac{1}{r^2} + \frac{2y^2}{r^4}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} y \left[\frac{r^2+1}{(r^2-1)^2 + 4y^2} - \frac{1}{r^2-1} - \frac{1}{2y^2} \right] \\ \frac{dy}{dt} &= -2U \frac{xy}{r^4} + \frac{\Gamma}{2\pi} x \left[\frac{r^2-1}{(r^2-1)^2 + 4y^2} - \frac{1}{r^2-1} \right] \end{aligned} \right.$$

egyenletek nyerhetők; expliçit kifejezés nyerhető az átáramlott henger által kifejtett ellenállásra is. Az

$$(2)\qquad \frac{1}{y^2}+\frac{4}{(r^2-1)^2}=ce^{-\frac{4}{a}y\frac{r^2-1}{r^2}}$$

integrálgörbék családja centrálszinguláris pontokkal bír, amelyek a $\pm 2y = r-\frac{1}{r}$ Föppl-féle görbén helyezkednek el (amelyen az örvénypár egyensúlyban van), azonkívül vannak még kétszeresen szinguláris pontok is, az y-tengelyen. Következésképpen az egyensúlyi helyzetek a Föppl-görbén szimmetrikus perturbálással szemben tetszőleges rendben stabilisak. Az örvények nyílt vagy zárt pályájukon cirkulációs értelemben mozognak úgy, hogy a Föppl-görbét 0-tól különböző sebességgel metszik. Az örvények pályájának egy vagy két — az x-tengellyel párhuzamos — aszimptotája van. (2) segítségével Föpplnek Bickley—Tomotik—Sugawara értelemben korrigált ellenállási formuláját nyerjük:

$$(3)\qquad P_x=64\pi\varrho U^2\frac{x}{r^4}\frac{y^2}{R^2}\frac{(r^2-1)^2}{r^4}\{4r^2y^2-(r^2-1)^2\}\ln^{-2}\frac{C}{R^2}y^2(r^2-1)^2,$$
$$R^2=(r^2-1)^2+4y^2,$$

ahol C egy ismeretlen paraméter, amelyet csak egyszer kell egyszer s mindenkorra meghatározni. Ezért a (3) képletet kísérleti úton kell ellenőrizni. Megjegyzendő, hogy a totális ellenállás egy körülfutásnál 0, míg egy részleges körülfutásnál csak a végpontoktól függ.

A geometriai, matematikai logika és matematikai gépek elmélete, valamint a valószínűségszámítási szekció és az oktatási szakosztály előadásairól szóló ismertetéseket lapunk következő számában folytatjuk.

A Bolyai János Matematikai Társulat Budapesti Tagozatának előadásai 1957. szeptember 1-től december 31-ig

Szeptember 14. Kárteszi Ferenc: *Érdekes geometriai feladatok.* Előadás középiskolai diákok részére.

Október 11. Hajnal András: *Gráfok felbontása teljes gráfokra.* Előadó ismertette Surányival közösen bizonyított tételét: Ha egy gráfban bármely sokszög háromszögekre bontható, és legfeljebb k elem választható ki úgy, hogy a kiválasztott elemek között ne legyen kettő összekötve, akkor a gráf felbomlik legfeljebb k teljes részgráf összegére. Előadó megmutatta, hogy ez a tétel Gallai T. két régebbi eredményének általánosítása és beszélt a további általánosítás lehetőségeiről.

Október 12. Turán Pál: *Bizonyos szélsőértékfeladatokról.* Előadás középiskolai diákok részére.

November 1. Noboru Itô (Japán): *Véges feloldható csoportok legkisebb p-metszetéről.* Legyen D a G véges feloldható csoport valamennyi Sylow féle p-csoportjának metszete. G-ben létezik két Sylow-féle p-csoport, A és B, az $A\cap B=D$ tulajdonsággal, ha a következő két feltétel egyike teljesül:
1. p páratlan, nem Mersenne-féle prímszám
2. a G csoport rendje páratlan.

November 22. Egerváry Jenő: *E. Purcell vektormódszere lineáris egyenletek megoldására és annak egy általánosítása.* Előadás a Magyar Tudományos